UNIDAD 1: ONDAS MECÁNICAS

PROBLEMA RESUELTO

ENUNCIADO:

La función correspondiente a una onda armónica en una cuerda es:

$$y_{(x,t)} = 0{,}05 \ . \cos \left(3{,}14 \ . \ x \ - \ 12{,}57 \ . \ t \right)$$

donde ***x*** e ***y*** están en metros (*m*) y ***t*** en segundos (*s*).

Calcule:

a) La longitud de onda, el período y la frecuencia.
b) Su velocidad de propagación.
c) Grafique función $y_{(x)}$ para t = 0 s, e $y_{(t)}$ para x = 0 m.
d) El desplazamiento máximo de un punto cualquiera de la cuerda.
e) El desplazamiento del punto x = 0,75 m en el instante t = 0,1 s
f) Sentido en que se mueve la onda.

RESOLUCIÓN:

a) Sabiendo que la función de onda genérica corresponde a:

$$y_{(x,t)} = A \ . \cos \underbrace{\left(K \ . \ x \ \pm \ \omega \ . \ t \ \pm \ \varphi_0 \right)}_{\textbf{Argumento de la función coseno, es un ángulo en RADIANES}}$$

Para nuestro caso:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Amplitud} & A = \pm\ 0{,}05 \quad m \\ \text{Numero de Onda} & K = 3{,}14 \quad 1/m \\ \text{Frecuencia Angular} & \omega = 12{,}57 \ 1/s \end{array}\right\} \ \textbf{Se debe tener especial cuidado con las unidades}$$

Fase inicial φ_0 = si no se indica su valor se considera φ_0 = 0 radianes)

tenemos que: Longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{3{,}14\,\frac{1}{m}} = 2{,}00 \ m$

Período $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12{,}57\,\frac{1}{s}} = 0{,}50 \ s$

Frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}50 \ s} = 2{,}00 \ Hz$

b) Sabiendo que $V = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$, para un espacio igual a una longitud de onda λ, le corresponde un tiempo igual al período T.

Por lo tanto, $V = \frac{\lambda}{T} = \frac{2{,}00 \ m}{0{,}50 \ s} = 4{,}00 \ m/s$

una forma de verificar es recordar que $\lambda = \frac{2\pi}{K}$ y $T = \frac{2\pi}{\omega}$, reemplazando en la anterior

$V = \frac{\frac{2\pi}{K}}{\frac{2\pi}{\omega}}$, simplificando y ordenando, $V = \frac{\omega}{K} = \frac{12{,}57\,\frac{1}{s}}{3{,}14\,\frac{1}{m}} = 4{,}00 \ m/s$

Recordemos que la velocidad de propagación de una onda depende solo de:

1. **la naturaleza de la misma. (sonido, luz, etc.)**
2. **del medio en la que se propaga. (aire, agua, vidrio, etc.)**
3. **de las condiciones en que se encuentra dicho medio. (temperatura, presión, vínculos, etc.)**

c) Cuando tenemos una función, como en éste caso que depende de dos variables, lo que facilita su análisis es dejar constante una de ellas (por lo general igual a cero), y analizar como varía la función con respecto a la otra.
En nuestro caso:
   1. Primero dejaremos constante $t = 0$ s, y analizaremos $y_{(x)}$.
   2. Luego dejaremos constante $x = 0$ m, y analizaremos $y_{(t)}$.

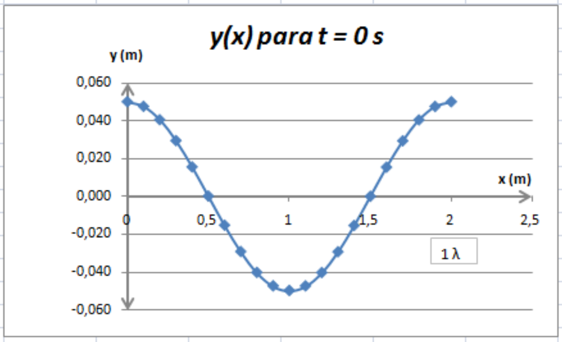
Éste desarrollo lo podemos hacer manualmente, utilizar una planilla Excel o algún software que grafique funciones (Fooplot y otros).

En nuestro caso, por una cuestión de prolijidad utilizaremos una planilla de cálculo Excel.

1.

B6 =$B$1*COS($B$2*A6-$B$3*$B$4)

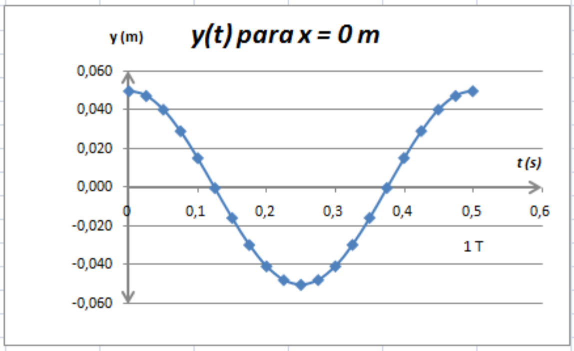
	A	B
1	*A =*	0,05
2	*K =*	3,14
3	*ω =*	12,57
4	*t =*	0
5	*x (m)*	*y (m)*
6	0	0,050
7	0,1	0,048
8	0,2	0,040
9	0,3	0,029
10	0,4	0,015
11	0,5	0,000
12	0,6	-0,015
13	0,7	-0,029
14	0,8	-0,040
15	0,9	-0,048
16	1	-0,050
17	1,1	-0,048
18	1,2	-0,041
19	1,3	-0,029
20	1,4	-0,016
21	1,5	0,000
22	1,6	0,015
23	1,7	0,029
24	1,8	0,040
25	1,9	0,048
26	2	0,050



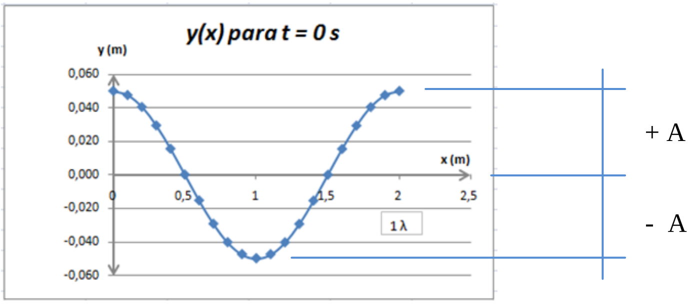
2.

B6 =$B$1*COS($B$2*$B$4-$B$3*A6)

	A	B
1	*A =*	0,05
2	*K =*	3,14
3	*ω =*	12,57
4	*x =*	0
5	*t (s)*	*y (m)*
6	0	0,050
7	0,025	0,048
8	0,050	0,040
9	0,075	0,029
10	0,100	0,015
11	0,125	0,000
12	0,150	-0,015
13	0,175	-0,029
14	0,200	-0,040
15	0,225	-0,048
16	0,250	-0,050
17	0,275	-0,048
18	0,300	-0,040
19	0,325	-0,029
20	0,350	-0,015
21	0,375	0,000
22	0,400	0,016
23	0,425	0,029
24	0,450	0,040
25	0,475	0,048
26	0,500	0,050



d) El desplazamiento máximo de un punto cualquiera de la cuerda con respecto a la posición de equilibrio corresponde a la amplitud de la onda, es decir $\boldsymbol{A} = \pm$ **0,05** $\boldsymbol{m}$, por ello corresponde anteponer el signo $\pm$ **,** seguido de la cantidad con su unidad correspondiente.



e) Para calcular el desplazamiento de un punto $\boldsymbol{x}$, para un tiempo $\boldsymbol{t}$, debemos reemplazar en nuestra función de onda los valores dados de $\boldsymbol{x}$ = 0,75 m y $\boldsymbol{t}$ = 0,1 s, y calcular el desplazamiento correspondiente. Debemos recordar que en la función de onda, el argumento de la función coseno, es un ángulo expresado en <u>**radianes**</u>.

La función de onda correspondiente es:

$$\boldsymbol{y}_{(x,t)} = 0{,}05 \;.\; \cos\,(\,3{,}14\;.\;\boldsymbol{x}\; - \;12{,}57\;.\;\boldsymbol{t}\,)$$

Reemplazando nos queda:

$$\boldsymbol{y}_{(x,t)} = 0{,}05 \text{ m} \;.\; \cos\,(\,3{,}14\;\; 1/m\;\; .\; 0{,}75\;\; m\; - \;12{,}57\;\; 1/s\; .\; 0{,}1\; s\,)$$

$\boldsymbol{y}_{(x,t)} = 0{,}05$ m . cos (1,1 rad) [La calculadora debe estar en Modo Radianes $\boxed{\textbf{R}}$]

$$\boldsymbol{y}_{(x,t)} = 0{,}05 \text{ m} \;.\; (\,0{,}45) = 0{,}023\; m$$

En la resolución de cualquier problema es muy útil siempre comparar el resultado analítico con un gráfico que ayude a comprender el significado físico del valor numérico obtenido.
Podemos recurrir a las planillas Excel utilizadas anteriormente y verificar el cálculo anterior.

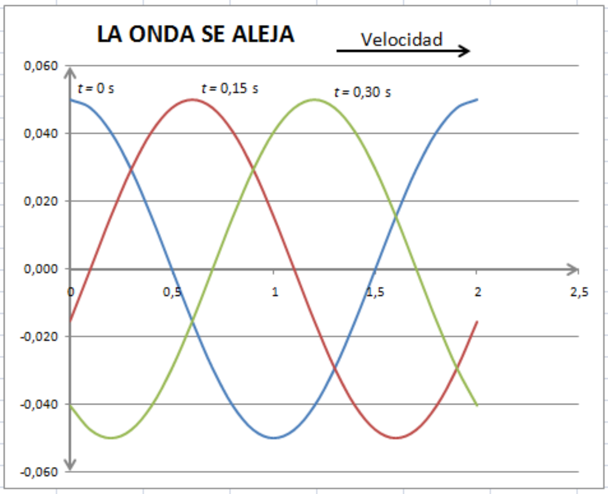
f) Para determinar el sentido de propagación de la onda, hay que analizar los signos de $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{\omega}$:

- Signos contrarios = **La onda se aleja**
- Signos iguales = **La onda se acerca**

También se puede analizar graficando *y(x)* para distintos tiempos ***t***

D6 f_x =$B$1*COS($B$2*A6-$B$3*$D$4)

	A	B	C	D
1	***A* =**	0,05		
2	***K* =**	3,14		
3	***ω* =**	12,57		
4	***t* =**	0	0,15	0,3
5	***x (m)***	***y (m)***	***y (m)***	***y (m)***
6	0	0,050	-0,015	-0,040
7	0,1	0,048	0,000	-0,048
8	0,2	0,040	0,015	-0,050
9	0,3	0,029	0,029	-0,048
10	0,4	0,015	0,040	-0,041
11	0,5	0,000	0,048	-0,029
12	0,6	-0,015	0,050	-0,016
13	0,7	-0,029	0,048	0,000
14	0,8	-0,040	0,041	0,015
15	0,9	-0,048	0,029	0,029
16	1	-0,050	0,016	0,040
17	1,1	-0,048	0,000	0,048
18	1,2	-0,041	-0,015	0,050
19	1,3	-0,029	-0,029	0,048
20	1,4	-0,016	-0,040	0,041
21	1,5	0,000	-0,048	0,030
22	1,6	0,015	-0,050	0,016
23	1,7	0,029	-0,048	0,000
24	1,8	0,040	-0,041	-0,015
25	1,9	0,048	-0,030	-0,029
26	2	0,050	-0,016	-0,040



PROBLEMAS

1. El período de un movimiento ondulatorio que se propaga por el eje de abscisas es T = 3 x 10^{-3}s. La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase es **φ** = π/2, vale es 30 *cm*.
   Calcular:
   a) La longitud de onda.
   b) La velocidad de propagación.
   c) Indique si los dos puntos están en fase o no.
   d) Si x_1 = 0 m, calcule la posición del primer punto (x'_2) que se encuentra en fase con x_1.

2. La función de onda correspondiente a una onda armónica en una cuerda es

$$\mathbf{y_{(x,t)} = 0{,}001(\mathit{m})\ .\ sen\ [\ 314\ (\mathit{1/s})\ .\ t + 62{,}8\ (\mathit{1/m})\ .\ x\ ]}$$

Calcular:
   a) En qué sentido se mueve la onda.
   b) La velocidad.
   c) La longitud de onda, frecuencia y período.
   d) El desplazamiento máximo de un segmento cualquiera de la cuerda.
   e) Grafique la función $\mathbf{y_{(x)}}$ e $\mathbf{y_{(t)}}$ en escalas adecuadas.

3. Escribir una función que interprete la propagación de una onda que se mueve sobre el eje x hacia la derecha a lo largo de una cuerda con velocidad de 10 *m/s*, frecuencia de 60 Hz y amplitud A = 0,2 *m*, y con condiciones de borde: para *x* = 0 y *t* = 0, *y* = 0

4. Una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda tensa está representada por la fución: $\boldsymbol{y\ (x,t) = A\ .\ \cos 2\pi/\lambda\ (\ x - V\ .\ t\ )}$
   Siendo $\boldsymbol{A}$ = 24 *mm*, $\boldsymbol{\lambda}$ = 48 *mm* y V = 6 *mm/seg*
   a) Calcular para el instante ***t*** = 0 la elongación ***y***, a intervalos de ***x*** de 6 *mm* (es decir, para ***x*** = 0, ***x*** = 6 *mm*, ***x*** = 12 *mm*, etc) desde ***x*** = 0 a ***x*** = 60 *mm*.

b) Representen los resultados en una grafica, que dará la forma de la cuerda en el instante t = 0.
c) Repita los cálculos, para los mismos valores de ***x*** en los instantes ***t*** = 1 seg., ***t*** = 2 seg, ***t*** = 3 seg y ***t*** = 4 seg. Muéstrese en la misma grafica la forma de la cuerda en cada uno de los instantes. ¿En qué dirección se propaga la onda?

5. La ecuación de una onda transversal es: $y_{(x,t)}$ **= 2 seno 2π (t / 0,01 – x / 30)** donde ***x*** e ***y*** están en centímetros, y ***t*** en segundos.
   Calcular:
   a) La amplitud.
   b) La longitud de onda.
   c) La frecuencia y el período.
   d) Velocidad de propagación de la onda.

6. Una onda sinusoidal transversal que se propaga de derecha a izquierda tiene una longitud de onda de 20 m, una amplitud de 4 m y una velocidad de propagación de 200 m/s.
   Hallar:
   a) La ecuación de la onda.
   b) La velocidad transversal máxima de un punto alcanzado por la vibración.

7. Una onda responde a la función $\Psi_{(x,t)}$ = 0,5 (m) . cos [0,1 (1/m) . x – 6,28 (1/s) . t]
   Aplicando la Ecuación Diferencial de Onda (Ecuación de d'Alembert):

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

   a) Calcule la velocidad de propagación de dicha onda.

8. Utilice la ecuación diferencial de una onda para determinar cuáles de las siguientes funciones representan a una onda:
   a) Y(x,t) = 10 (x – v * t)2 + 1
   b) Y(x, t) = 10 x2 – 20 x v t + 10 v t2
   c) Y(x,t) = A sen (k x) + ω t2 con A, k y ω constantes
   d) Y(x,t) = 2 sen (0,1 x + 6,28 t)

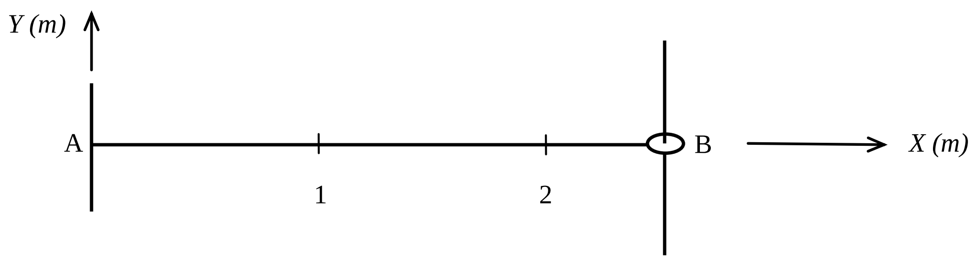
PARA RECORDAR

8. Práctica interactiva: La idea es que puedan ejercitarse en sus hogares con la siguiente simulación:

http://kyleforinash.altervista.org/Ondas/SuperpositionJS.html

ONDAS ESTACIONARIAS

9. Se dispone de una cuerda horizontal tensa, de largo L = 2,50 m, con el extremo A fijo y con el extremo B sujeto a un anillo que impide su desplazamiento en ***x***, pero permite su desplazamiento sin rozamiento en ***y*,** como indica el siguiente gráfico:



En dicha cuerda se propaga una onda incidente de A a B, que responde a la función:

$$y_{inc\,(x,t)} = 0{,}1 \,.\, \text{sen}\,(\, 3{,}14 \,.\, x - 1{,}57 \,.\, t\,) \qquad \text{Unidades en el S.I.}$$

a) Calcule:
- Longitud de onda λ.
- Período T y Frecuencia f.
- Velocidad V.

b) Grafique la onda incidente para t = 0 s. (utilice un color determinado)

c) Exprese la función de la onda reflejada de B a A:

$$y_{ref\,(x,t)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d) Grafique la onda reflejada para t = 0 s. (utilice un color distinto del anterior)

e) Compare la onda incidente con la reflejada e indique cuales magnitudes cambian y cuales no cambian, justifique.

• La rapidez (módulo de la velocidad).	Si	No
• La frecuencia.	Si	No
• La longitud de onda.	Si	No
• La Amplitud.	Si	No
• El sentido de propagación.	Si	No

f) Grafique las ondas incidente y reflejada y calcule la resultante de la superposición.

g) De acuerdo a lo obtenido, se produce una superposición CONTRUTIVA o DESTRUCTIVA.

h) Calcule la función de la onda estacionaria resultante de la interferencia o superposición de las anteriores:

$$y_{(x,t)} = y_{inc\,(x,t)} + y_{ref\,(x,t)} =$$

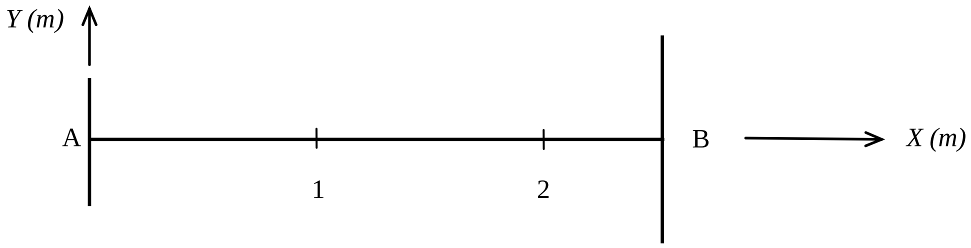
[Ayuda: sen (α ± β) = sen (α) . cos (β) ± cos (α) . sen (β)]

i) Proponga valores de ***x, t*** y verifique que la función de onda calculada en el punto anterior concuerda la onda dibujada.

j) Grafique la onda resultante $y_{(x)}$ para tiempos t = 0,5 s, 1,0 s, 1,5 s y 2 s y analice que obtiene.

k) En dicho gráfico ubique los Nodos y Antinodos (crestas y valles) e indique sus posiciones.

10. La cuerda del problema anterior ahora se encuentra fija en sus dos extremos A y B. La masa unitaria y la tensión son las mismas, por lo tanto la velocidad de propagación es la misma V = 0,5 m/s.



a) Grafique la onda estacionaria correspondiente al Modo Fundamental o 1er Armónico.
b) Calcule la frecuencia **f $_0$** correspondiente a dicho Modo.
c) Ubique los Nodos y Antinodos e indique sus posiciones.
d) Grafique la onda correspondiente al 2do, 3er y 4to Armónico y calcule las correspondientes frecuencias **f $_1$, f $_2$, f $_3$.**

RESPUESTAS

ONDAS

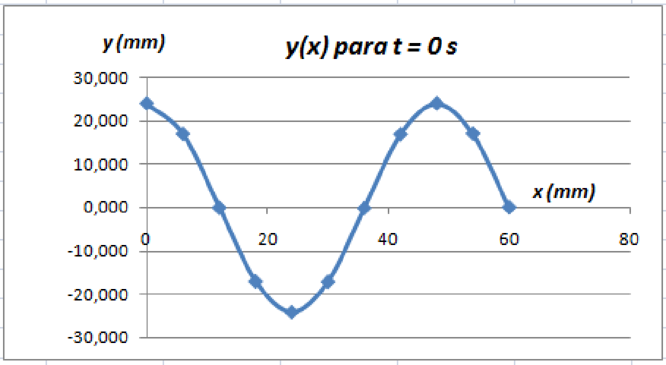
1. a) 1,20 *m*
b) 400 *m/s*
c) Como la diferencia de fase No es múltiplo de 2π, los puntos **No están en fase.**
d) $x'_2 = 1{,}20\ m$

2. a) Sentido –x, se acerca.
b) 5,00 m/s
c) λ = 0,10 m   f = 50 Hz   T = 0,02 s.
d) Desplazamiento máximo A = ± 0,001 m = ±1 mm

3. a) *y(x,t)* = 0,2 (m) . seno [37,7 (1/m) . *x* – 377 (1/s) . *t*]

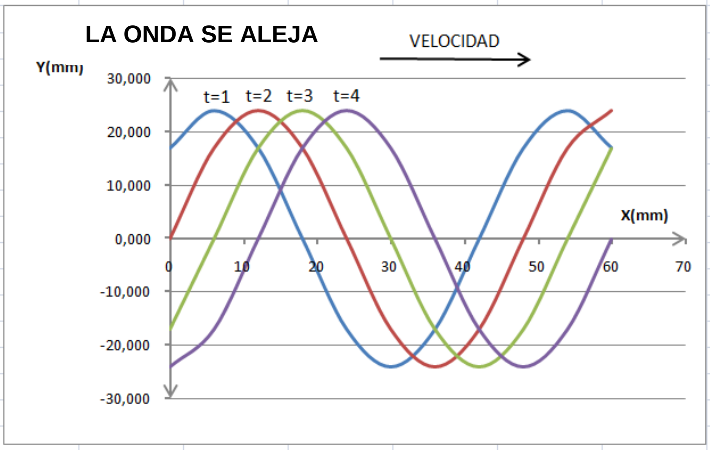
4. a) y b)

x (mm)	*y (mm)*
0	24,000
6	16,981
12	0,029
18	-16,940
24	-24,000
30	-17,021
36	-0,086
42	16,899
48	24,000
54	17,062
60	0,144



C)

t =	1	2	3	4
x (mm)	*y (mm)*	*y (mm)*	*y (mm)*	*y (mm)*
0	16,977	0,019	-16,950	-24,000
6	24,000	16,974	0,014	-16,954
12	16,984	24,000	16,971	0,010
18	0,034	16,987	24,000	16,967
24	-16,937	0,038	16,991	24,000
30	-24,000	-16,933	0,043	16,994
36	-17,025	-24,000	-16,930	0,048
42	-0,091	-17,028	-24,000	-16,926
48	16,896	-0,096	-17,031	-24,000
54	24,000	16,893	-0,101	-17,035
60	17,065	24,000	16,889	-0,105



Como indica el gráfico la onda se propaga en sentido + ***x,*** es decir se aleja.

5. a) A = $\pm$ 2 cm = $\pm$ 0,02 m
   b) λ = 30 cm = 0,30 m
   c) T = 0,01 s   f = 100 Hz
   d) V = 3.000 cm/s = 30 m/s

6. a) $\boldsymbol{y\ (x,t)} = A \,.\, \text{sen}\,[\,K\,\boldsymbol{.}\,\boldsymbol{x} + \omega\,\boldsymbol{.}\,\boldsymbol{t}\,] = 4\ \text{m} \,.\, \text{sen}\,[\ 0{,}314\ (1/m)\ .\ \boldsymbol{x} + 62{,}8\ (1/s)\ .\ \boldsymbol{t}\,]$

   b) $V_{\text{(transversal) MAX}} = 251{,}2$ m/s

7. a) V = 62,8 *m/s*

8. a) Si es una onda
   b) No es una onda
   c) No es una onda
   d) Si es una onda

ONDAS ESTACIONARIAS

9. a) λ = 2,00 m

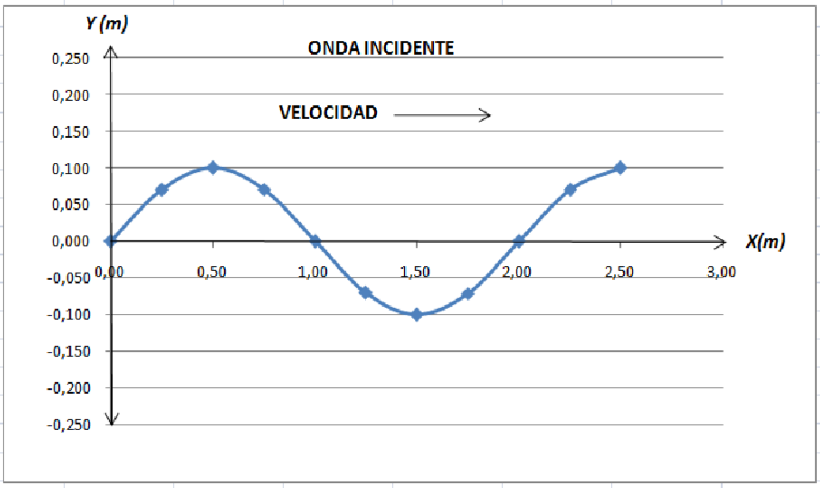
T = 4,0 s f = 0,25 Hz

V = 0,5 m/s

b)

B6 =$B$1*SENO($B$2*A6-$B$3*$B$4)

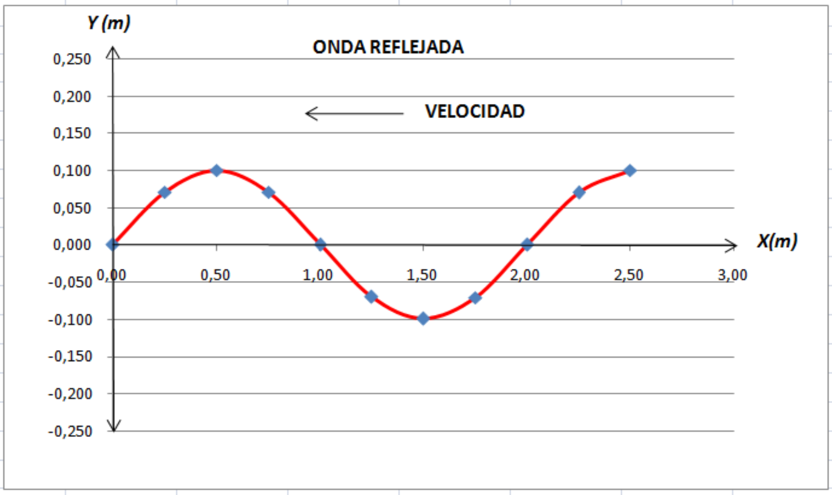
A =	0,1
K =	3,14
ω =	1,57
t =	0
***x* (m)**	***y* (m)**
0,00	0,000
0,25	0,071
0,50	0,100
0,75	0,071
1,00	0,000
1,25	-0,071
1,50	-0,100
1,75	-0,071
2,00	0,000
2,25	0,070
2,50	0,100



c) $y_{ref\ (x,t)}$ **= 0,1 . sen (3,14 .** x **+ 1,57 .** t **)**

B6 =$B$1*SENO($B$2*A6+$B$3*$B$4)

A =	0,1
K =	3,14
ω =	1,57
t =	0
***x* (m)**	***y* (m)**
0,00	0,000
0,25	0,071
0,50	0,100
0,75	0,071
1,00	0,000
1,25	-0,071
1,50	-0,100
1,75	-0,071
2,00	0,000
2,25	0,070
2,50	0,100



d)

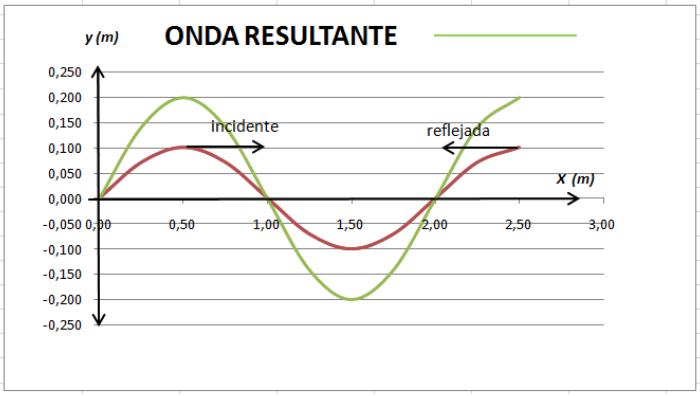
e)

Rapidez:	NO	ambas se propagan en el mimo medio.
Frecuencia:	NO	cuando llega la incidente parte la reflejada.
Longitud de onda:	NO	si **V** es cte. y **f** es cte, **λ** también lo es.
Amplitud:	NO	la reflejada parte del punto donde llegó la incidente.
Sentido	SI	se propagan en sentidos contrarios.

f)

D6 =B6+C6

	A	B	C	D
1	A =	0,1		
2	K =	3,14		
3	ω =	1,57		
4	t =	0		
5	*x (m)*	*y inc (m)*	*y ref (m)*	*y (m)*
6	0,00	0,000	0,000	0,000
7	0,25	0,071	0,071	0,141
8	0,50	0,100	0,100	0,200
9	0,75	0,071	0,071	0,142
10	1,00	0,000	0,000	0,000
11	1,25	-0,071	-0,071	-0,141
12	1,50	-0,100	-0,100	-0,200
13	1,75	-0,071	-0,071	-0,142
14	2,00	0,000	0,000	-0,001
15	2,25	0,070	0,070	0,141
16	2,50	0,100	0,100	0,200



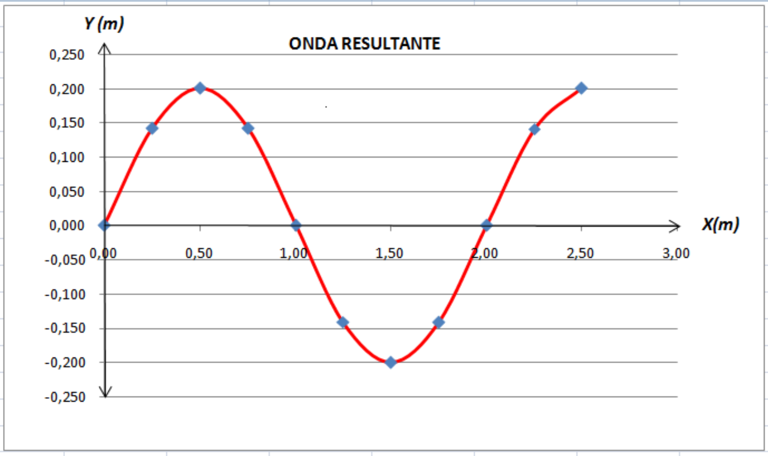
g) Superposición constructiva

h) $y_{(xt)} = 2 \,.\, A \,.\, \text{sen}\,(\,K \,.\, x\,) \,.\, \cos\,(\,\omega \,.\, t\,) = 0{,}2 \,.\, \text{sen}\,(\,3{,}14 \,.\, x\,) \,.\, \cos\,(\,1{,}57 \,.\, t\,)$

i)

B6 =2*$B$1*SENO($B$2*A6)*COS($B$3*$B$4)

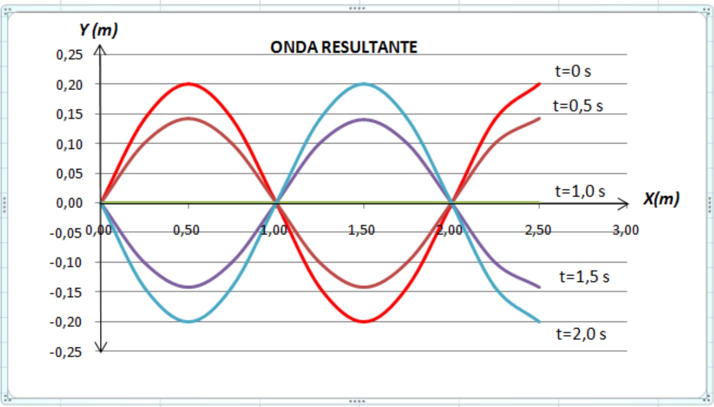
	A	B
1	A =	0,1
2	K =	3,14
3	ω =	1,57
4	t =	0
5	*x (m)*	*y (m)*
6	0,00	0,000
7	0,25	0,141
8	0,50	0,200
9	0,75	0,142
10	1,00	0,000
11	1,25	-0,141
12	1,50	-0,200
13	1,75	-0,142
14	2,00	-0,001
15	2,25	0,141
16	2,50	0,200
17		



j)

1 Gráfico

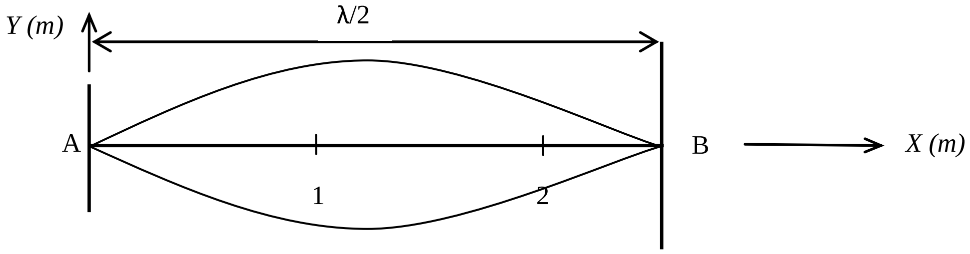
	A	B	C	D	E	F
1	A =	0,1				
2	K =	3,14				
3	ω =	1,57				
4	t =	0	0,5	1,0	1,5	2,0
5	*x (m)*	*y (m)*	*y (m)*	*y (m)*	*y (m)*	*y (m)*
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7	0,25	0,14	0,10	0,00	-0,10	-0,14
8	0,50	0,20	0,14	0,00	-0,14	-0,20
9	0,75	0,14	0,10	0,00	-0,10	-0,14
10	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11	1,25	-0,14	-0,10	0,00	0,10	0,14
12	1,50	-0,20	-0,14	0,00	0,14	0,20
13	1,75	-0,14	-0,10	0,00	0,10	0,14
14	2,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
15	2,25	0,14	0,10	0,00	-0,10	-0,14
16	2,50	0,20	0,14	0,00	-0,14	-0,20
17						



k) Nodos: $x_1 = 0$ m $x_2 = 1{,}0$ m $x_3 = 2{,}0$ m

Antinodos: $x_1 = 0{,}5$ m $x_2 = 1{,}5$ m $x_3 = 2{,}5$ m

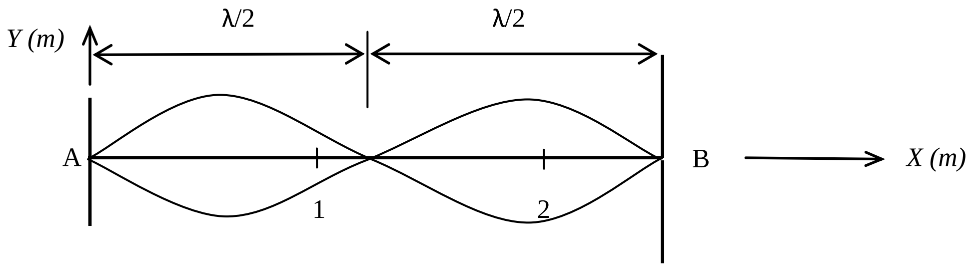
10. a) <u>Modo fundamental o 1^er^ Armónico</u>



b) $f_0 = 0{,}1$ Hz

c) Nodos: $x_1 = 0$ m $x_2 = 2{,}5$ m
Antinodos: $x_1 = 1{,}25$ m

d) <u>2^do^ Armónico</u>



$f_1 = 0{,}2$ Hz

Nodos: $x_1 = 0$ m $x_2 = 1{,}25$ m $x_3 = 2{,}5$ m

Antinodos: $x_1 = 0{,}625$ m $x_2 = 1{,}875$ m

<u>3^er^ Armónico</u>

$f_2 = 0{,}3$ Hz

Nodos: $x_1 = 0$ m $x_2 = 0{,}833$ m $x_3 = 1{,}666$ m $x_4 = 2{,}5$ m

Antinodos: $x_1 = 0{,}416$ m $x_2 = 1{,}249$ m $x_3 = 2{,}083$ m

<u>4^to^ Armónico</u>

$f_3 = 0{,}4$ Hz

Nodos: $x_1 = 0$ m $x_2 = 0{,}625$ m $x_3 = 1{,}25$ m $x_4 = 1{,}875$ m $x_5 = 2{,}5$ m

Antinodos: $x_1 = 0{,}312$ m $x_2 = 0{,}937$ m $x_3 = 1{,}562$ m $x_4 = 2{,}187$ m