Capítulo 1

El cuerpo de los números reales

1.1. Introducción

Existen diversos enfoques para introducir los números reales: uno de ellos parte de los números naturales $1, 2, 3, \ldots$ utilizándolos para construir los números racionales y éstos son a su vez utilizados para construir los números irracionales, tales como $\sqrt{2}$ y π. Los números reales serían entonces la unión de los números racionales e irracionales. Sin embargo en esta asignatura sólo nos interesan las propiedades de los números reales y no la forma empleada para construirlos, por eso vamos a introducirlos desde un punto de vista axiomático.

Supondremos que existe un conjunto no vacío $\mathbb{R}$, llamado conjunto de los números reales, que satisface una serie de axiomas que agruparemos en 3 categorías: axiomas de cuerpo, axiomas de orden y axioma del supremo (llamado también axioma de completitud o axioma de continuidad).

1.2. Axiomas de cuerpo

Suponemos que en $\mathbb{R}$ hay definida una operación interna $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x + y$, llamada "suma" que satisface las siguientes propiedades:

(a1) Asociativa: $x+(y+z)=(x+y)+z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a2) Conmutativa: $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(a3) Existencia de elemento neutro: Existe un número real que llamaremos 0 tal que

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a4) Existencia de elemento opuesto : dado cualquier número real x existe otro número real x', que llamaremos elemento opuesto de x, tal que

$$x + x' = x' + x = 0.$$

Denotaremos $-x := x'$.

Al satisfacer las propiedades (a1)-(a4) decimos que el conjunto $(\mathbb{R}, +)$ tiene estructura de grupo conmutativo o abeliano.

Suponemos también que en $\mathbb{R}$ existe otra operación interna $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x \cdot y$, llamada “producto” o “multiplicación” que satisface las siguientes propiedades:

(a5) Asociativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

(a6) Conmutativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = y \cdot x$.

(a7) Existencia de elemento unidad (elemento neutro de la multiplicación): existe un número real que llamaremos 1, distinto de 0, tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 \cdot x = x$.

(a8) Existencia de elemento inverso (elemento simétrico respecto de la multiplicación): dado cualquier número real $x \neq 0$ existe un elemento $y \in \mathbb{R}$, que llamaremos inverso de x, tal que $x \cdot y = 1$. Denotaremos $x^{-1} := y$.

(a9) Distributiva del producto respecto de la suma:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

A partir de ahora al producto $x \cdot y$ también lo representaremos simplemente por la yuxtaposición $x\,y$.

Al satisfacer $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ los axiomas (a1)-(a9) se dice que tiene estructura de cuerpo conmutativo. De los axiomas anteriores se pueden deducir todas las leyes usuales del Álgebra elemental.

Ejemplo 1.2.1. *Demostrar las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.*
2. *Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $-(-a) = a$.*
3. *El elemento 0 es único.*
4. *El elemento 1 es único.*
5. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.*
6. *Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.*

1.3. Axiomas de orden

Este grupo de axiomas se refiere a la ordenación de los números reales.

DEFINICIÓN 1.3.1. *Se dice que la relación binaria $\leq$ ("menor o igual que") establece una relación de orden en un conjunto $S \neq \emptyset$ si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Reflexiva:* $x \leq x,\ \forall x \in S$.
2. *Antisimétrica:* $x, y \in S,\ x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$.
3. *Transitiva:* $x, y, z \in S,\ x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Supondremos que los números reales $\mathbb{R}$ están ordenados por una relación de orden $\leq$ que además cumple los siguientes axiomas:

(a10) La relación de orden es total:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq y \quad \text{ó} \quad y \leq x.$$

(a11) La relación de orden es compatible con la suma:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z.$$

(a12) La relación de orden es compatible con la multiplicación:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y\,,\ z \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x\,z \leq y\,z.$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ y $x \neq y$, escribiremos $x < y$, ("x menor que y").

De los axiomas de orden se pueden deducir todas las reglas usuales del cálculo con desigualdades. El conjunto $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ cumpliendo las propiedades (a1)-(a12) se dice que tiene estructura de cuerpo conmutativo ordenado. Sin embargo estos axiomas no son suficientes para que se pueda caracterizar de forma única al conjunto de los números reales. Nos falta todavía el axioma del supremo que veremos más adelante.

DEFINICIÓN 1.3.2. *Un número real x se llama positivo si $x > 0$ y negativo si $x < 0$. Designaremos por $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales positivos y por $\mathbb{R}^-$ al conjunto de los números reales negativos. Asimismo, definimos*

$$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Proposición 1.3.1. *A partir de los axiomas (a1)-(a12) se deducen las siguientes propiedades de los números reales:*

p1) $a \le b \Leftrightarrow -a \ge -b$.

p2) $a \le b,\ c \le 0 \Rightarrow ac \ge bc$.

p3) $a \cdot a > 0, \forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

p4) $a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+$.

p5) $0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1} > 0$.

p6) $0 < a < b, 0 < c < d \Rightarrow 0 < ac < bd$.

El siguiente teorema, a pesar de su sencillez, resulta de gran utilidad en muchas situaciones.

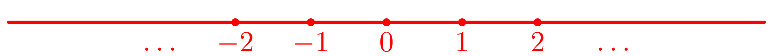
Teorema 1.3.1. *Sean a, b números reales tales que*

$$a \le b + \varepsilon \quad \textit{para todo } \varepsilon > 0.$$

Entonces $a \le b$.

1.3.1. La recta real

Los números reales se representan geométricamente como puntos de una recta (denominada recta real)



La relación de orden admite una interpretación simple. Si $x < y$ el punto x está a la izquierda del punto y. Los números positivos están a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda. Si $a < b$ entonces $a < x < b$ significa que x está entre a y b.

Definición 1.3.3 (Intervalos en $\mathbb{R}$). *Se llama intervalo abierto de extremos a y b al conjunto*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Se llama intervalo cerrado de extremos a y b al conjunto

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Análogamente se definen los intervalos semiabiertos o semicerrados

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

También podemos definir intervalos infinitos (los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ no son números reales y sólo se utilizan como notación)

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\},$$

$$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\},$$

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},$$

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}.$$

El siguiente resultado caracteriza los intervalos en $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 1.3.2. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si dados $x, y \in A$, $x < y$, $z \in \mathbb{R}$ cumpliendo $x < z < y$, entonces $z \in A$.*

1.4. Subconjuntos de los números reales

1.4.1. Los números naturales

DEFINICIÓN 1.4.1. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice que es un conjunto inductivo si verifica que*

1) $1 \in A$.

2) Si $x \in A$ *entonces* $x + 1 \in A$.

Un número real se dice natural si pertenece a todos los conjuntos inductivos. El conjunto de los números naturales se denomina como $\mathbb{N}$. En particular $\mathbb{N}$ también es un conjunto inductivo. Contiene al número 1, al número $1 + 1$ (denotado por 2), al número $2 + 1$ (denotado por 3) y así sucesivamente. Más formalmente se satisface el siguiente resultado.

TEOREMA 1.4.1 (**Principio de inducción**).

1) *El conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$ *es inductivo.*

2) *Si* $A \subseteq \mathbb{N}$ *y* A *es inductivo, entonces* $A = \mathbb{N}$.

En la práctica el principio de inducción se utiliza como sigue: supongamos que queremos probar que una cierta propiedad P_n se cumple para cualquier $n \in \mathbb{N}$. El principio de inducción matemática afirma que si se cumplen las dos condiciones siguientes

i) P_1 es cierta,

ii) **(Hipótesis de inducción)** Si P_k es cierta entonces P_{k+1} también es cierta,

entonces la propiedad P_n se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

EJERCICIO 1.4.1. *Probar mediante inducción que la fórmula* $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *es válida para cualquier valor de* $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSICIÓN 1.4.1. *Los números naturales satisfacen las siguientes propiedades:*

1) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

2) $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n \in \mathbb{N}$.

3) $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow mn \in \mathbb{N}$.

4) $m \in \mathbb{N} \Rightarrow -m \notin \mathbb{N}$.

5) $n \in \mathbb{N},\ n \neq 1 \ \Rightarrow\ 1/n \notin \mathbb{N}.$

6) $n \in \mathbb{N},\ n \neq 1 \ \Rightarrow\ n-1 \in \mathbb{N}.$

7) $m, n \in \mathbb{N},\ n < m \ \Leftrightarrow\ m-n \in \mathbb{N}.$

8) $m, n \in \mathbb{N},\ n < m \ \Rightarrow\ \ n+1 \leq m.$

9) Si $n \in \mathbb{N}$ *y* $x \in \mathbb{R}$ *con* $n < x < n+1$*, entonces* $x \notin \mathbb{N}$.

1.4.2. Los números enteros

A partir del conjunto de los números naturales podemos definir el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. En $\mathbb{Z}$ todo elemento posee un simétrico, propiedad que no cumplen los números naturales. El conjunto de los números enteros se define como

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

PROPOSICIÓN 1.4.2. *Los números enteros cumplen las siguientes propiedades:*

1) $p, q \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ \ p+q \in \mathbb{Z}.$

2) $p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow\ \ p\,q \in \mathbb{Z}.$

3) $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *y* $q^{-1} \in \mathbb{Z}$*, entonces* $q = 1$ *ó* $q = -1$.

4) $p, q \in \mathbb{Z},\ p < q \Rightarrow\ \ p+1 \leq\ \ q.$

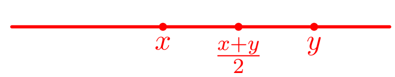
1.4.3. Los números racionales

Se llama conjunto de los números racionales , a

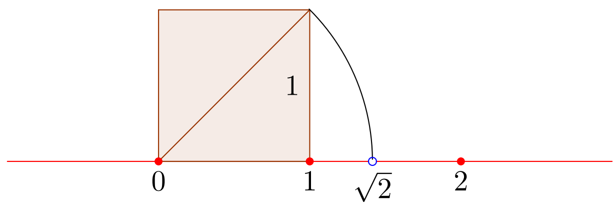
$$\mathbb{Q} := \{p/q : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}\,.$$

Dicho conjunto contiene al conjunto de los números enteros (cualquier número entero p puede expresarse en la forma $p = p/1 \in \mathbb{Q}$) y $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ satisface los axiomas (a1)-(a12), por lo que es un cuerpo conmutativo ordenado.

Además si $x < y$ son dos números racionales entonces el punto medio $\dfrac{x+y}{2}$ es otro número racional comprendido entre ambos.



Esto implica que entre dos racionales cualesquiera hay siempre infinitos números racionales distintos. Sin embargo los números racionales no "llenan" la recta porque se sabe desde la escuela pitagórica que la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 no es conmesurable con la longitud del lado (es decir, $\sqrt{2}$ no es un número racional).



Por tanto, aunque $\mathbb{Q}$ satisface los 12 axiomas (a1)-(a12) deja "huecos" sin rellenar en la recta real. Necesitamos introducir un nuevo axioma (el axioma del supremo) que garantice al conjunto de los números reales una propiedad de continuidad que resulta fundamental en muchos teoremas del Análisis.

1.5. El Axioma del Supremo

1.5.1. Cotas superiores e inferiores de un conjunto

Definición 1.5.1. *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, decimos que el elemento α es una cota superior del conjunto A, si satisface*

$$x \leq \alpha, \quad \forall x \in A.$$

Al conjunto de las cotas superiores de A lo llamaremos $M(A)$.

Análogamente, diremos que $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior del conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, si se cumple que

$$\beta \leq x, \quad \forall x \in A.$$

Llamaremos $m(A)$ al conjunto de las cotas inferiores de A.

Cuando un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ posee una cota superior (inferior) decimos que está acotado superiormente (inferiormente). Si ocurren ambas cosas decimos que está acotado.

Resulta evidente que si α es una cota superior de un conjunto A, también lo será cualquier otro número mayor que α y si β es una cota inferior de un conjunto A, también lo será cualquier otro número menor que β.

Definición 1.5.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es el máximo del conjunto A, $a = \max(A)$, si se cumple que a es una cota superior de A y además $a \in A$.*

Análogamente, diremos que $b \in \mathbb{R}$ es el mínimo de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, $b = \min(A)$, si se cumple que b es una cota inferior de A y además $b \in A$.

Observación 1.5.1. *i) El máximo (mínimo) de un conjunto, si existe, es único.*

ii) Todo subconjunto, no vacío, de números naturales tiene mínimo (esta propiedad se conoce como "principio de buena ordenación de los números naturales" y es equivalente al "principio de inducción").

Hay conjuntos de números reales que no tienen ni máximo ni mínimo, por ejemplo, $\mathbb{R}$ o $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$. Sin embargo el conjunto A está acotado mientras que $\mathbb{R}$ no lo está.

1.5.2. Supremo e ínfimo de un conjunto

Definición 1.5.3. *Sea $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Si el conjunto A está acotado superiormente, llamamos supremo del conjunto A, $\sup(A)$, al mínimo (si existe) del conjunto de las cotas superiores de A,*

$$\sup(A) := \text{mín}(M(A)).$$

De igual forma, si $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, está acotado inferiormente, llamamos ínfimo del conjunto A, $\text{ínf}(A)$, al máximo (si existe) de las cotas inferiores de A,

$$\text{ínf}(A) := \text{máx}(m(A)).$$

El supremo e ínfimo de un conjunto de números reales están caracterizados por las siguientes propiedades.

Teorema 1.5.1. *Sea $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple que*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & x \leq \alpha, \quad \forall x \in A \\ 2) & \forall \varepsilon > 0, \exists\, x = x(\varepsilon) \in A : \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha. \end{cases} \\
\beta &= \text{ínf}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \beta \leq x, \quad \forall x \in A \\ 2) & \forall \varepsilon > 0, \exists\, x = x(\varepsilon) \in A : \beta \leq x < \beta + \varepsilon \end{cases}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5.1. *Determinar si existen el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes conjuntos:*

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 3\}$, b) $(0, +\infty)$, c)$[-3, +\infty)$.

1.5.3. El axioma del supremo

El axioma del supremo, junto con los axiomas (a1)-(a12), permite caracterizar de forma única el conjunto de los números reales.

(a13) (Axioma del supremo) Todo conjunto de números reales, no vacío y acotado superiormente, tiene supremo.

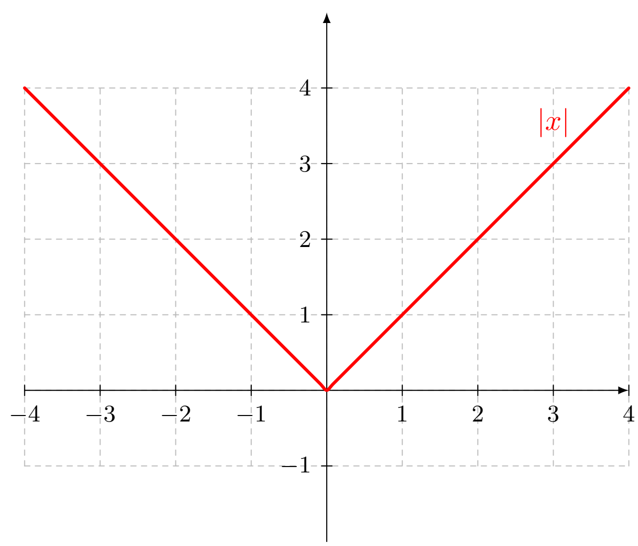
Observación 1.5.2. *Como consecuencia del axioma del supremo se deduce también que todo conjunto de números reales, no vacío y acotado inferiormente, tiene ínfimo.*

El axioma del supremo también se conoce como axioma de completitud o de continuidad porque garantiza que los números reales "llenan" la recta. Además nos permite distinguir entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, porque $\mathbb{Q}$ no satisface el axioma del supremo. Por ejemplo el conjunto $A=\{x\in\mathbb{Q}^+ : x^2<2\}$ está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$ pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$, puesto que $\sqrt{2}$ no es racional.

1.6. Valor absoluto de un número real

Se define el valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ como la función definida para cada $x \in \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x\geq 0 \\ -x, & \text{si } x<0. \end{cases}$$



Proposición 1.6.1 (Propiedades del valor absoluto). *1)* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|x|\geq 0$.

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$.

4) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$.

5) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $|x\, y| = |x|\, |y|$.

6) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a \geq 0$, $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

7) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad triangular).*

8) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

1.7. Algunas nociones topológicas en la recta real

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$, llamaremos entorno de centro a y radio δ, $E(a, \delta)$, al conjunto

$$E(a, \delta) := (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}.$$

Llamaremos entorno reducido de centro a y radio δ, $E^*(a, \delta)$, al conjunto

$$E^*(a, \delta) = E(a, \delta) \setminus \{a\}.$$

El concepto de entorno nos permite formalizar la idea intuitiva de "proximidad". Si tomamos el radio δ pequeño, entonces los puntos del entorno $E(a, \delta)$ están próximos al punto a. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

1) Decimos que $a \in A$ es un punto interior de A si existe un entorno $E(a, \delta)$ tal que $E(a, \delta) \subset A$. Al conjunto de los puntos interiores del conjunto A se le llama interior de A, $\operatorname{int}(A)$.

2) Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un punto frontera del conjunto A si dado cualquier entorno $E(a, \delta)$ se cumple que
$$E(a, \delta) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad E(a, \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset.$$
Al conjunto de los puntos frontera del conjunto A se le llama frontera de A, $\operatorname{fr}(A)$.

3) Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un punto adherente del conjunto A si para cualquier entorno $E(a, \delta)$ se cumple que $E(a, \delta) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de los puntos adherentes del conjunto A se le llama adherencia de A, $\bar{A}$.

4) Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación del conjunto A si para cualquier entorno $E(a, \delta)$ se cumple que $E^*(a, \delta) \cap A \neq \emptyset$.

   Al conjunto de los puntos de acumulación del conjunto A se le llama conjunto derivado de A, y se denota por A'. (No confundir el conjunto derivado con la derivada de una función que estudiaremos en un tema posterior).

5) Decimos que $a \in A$ es un punto aislado del conjunto A si existe un entorno $E(a, \delta)$ tal que $E(a, \delta) \cap A = \{a\}$.

Observación 1.7.1. *1. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice que es abierto si $A = \operatorname{int}(A)$.*

2. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice que es cerrado si $A = \overline{A}$.

3. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice que es denso en $\mathbb{R}$ si $\overline{A} = \mathbb{R}$.

4. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice que es compacto si es cerrado y acotado. Veremos la importancia de los conjuntos compactos cuando estudiemos ciertas propiedades de las funciones continuas.