Modelo de 1º Parcial de Introducción a la Matemática

Preguntas teóricas típicas del 1º Parcial

1. Enuncie los Axiomas de orden. Ejemplifique cada uno de los axiomas.
2. Defina "Valor absoluto de un número real". Enuncie las propiedades.
3. Defina "Entorno abierto de centro c y radio δ. Defina "Entorno reducido de centro c y radio δ". Exprese el intervalo $(7,15)$ como entorno abierto simétrico.
4. Defina los distintos tipos de operaciones elementales de filas e indique en cada caso la operación elemental de filas inversa.
5. Defina "Matrices equivalentes por filas". Enuncie las propiedades de la relación de equivalencia.
6. Enuncie el teorema que relaciona las matrices equivalentes por filas con los sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.
7. Defina "Matriz escalón reducida por filas".
8. Enuncie el Teorema de Rouché - Frobenius. Ejemplifique. Explique cómo se aplica el Teorema de Rouché – Frobenius al caso de un sistema homogéneo.
9. Enuncie el teorema que relaciona el Conjunto solución de un Sistema homogéneo con las incógnitas no principales. Enuncie el Corolario del teorema anterior. Ejemplifique ambos.
10. Defina "Rango de fila de una matriz". Explique la relación del Rango de fila de la matriz de coeficientes y del Rango de fila de la matriz aumentada con la Compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales y con su Conjunto solución (en qué casos existe única solución, en qué casos no hay solución y en qué casos existen infinitas soluciones).
11. Defina "Suma de matrices", "Producto de una matriz por un escalar" y "Producto de matrices". Enuncie las propiedades de cada operación.
12. Defina "Combinación lineal de matrices". Invente una matriz escalón reducida por filas, suponga que dicha matriz representa un sistema resolvente y escriba el conjunto solución como combinación lineal de n-uplas.
13. Defina "Combinación lineal de matrices" y formule un ejemplo con matrices de $\mathbb{R}^{2\times 1}$.
14. Defina "Matriz elemental". Enuncie el teorema que relaciona el resultado de efectuar una operación elemental de filas a una matriz cualquiera A con el producto de la matriz elemental correspondiente a dicha operación elemental por la matriz A. Ejemplifique el teorema.
15. Ejemplifique el teorema cuyo enunciado es: "Sea A matriz $m \times n$, e una operación elemental de filas y E matriz elemental de orden m, tal que $E = e(Im)$. Entonces $e(A) = EA$". Aclaración: Esta pregunta se refiere al mismo teorema de la pregunta anterior.
16. Explique el teorema cuyo enunciado es: " $A \overset{f}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad B = P\,A$, con P un producto de matrices elementales". Ejemplifique.
17. Defina "Matriz inversible". Demuestre que la inversa de toda matriz inversible es única.
18. Defina matriz reducida por filas. Demuestre que dos matrices que tienen la misma matriz escalón reducida por filas son equivalentes por filas.
19. Defina "Matrices equivalentes por filas". Explique cómo haría para saber si dos matrices de $\mathbb{R}^{m\times n}$ son equivalentes por filas.
20. Demuestre que toda matriz inversible es simplificable.
21. Demuestre: "Sean A y B matrices que pertenecen a $\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$. Si A y B son inversibles, entonces el producto $A.B$ es inversible y $(A.B)^{-1} = B^{-1}.\ A^{-1}$".
22. Demuestre que toda matriz elemental es inversible. Ejemplifique.

23. Indique en cada caso si el enunciado es equivalente a la siguiente afirmación: “A es una matriz inversible”. Justifique la respuesta. Aclaración: dos enunciados equivalentes son enunciados tales que cada uno se cumple si y solo si se cumple el otro.

    a) El sistema AX=H tiene solución.

    b) La matriz escalón reducida por filas de A es la matriz identidad.

    c) A es una matriz cuadrada.

    d) El sistema homogéneo AX=O tiene solución.

    e) A es un producto de matrices elementales.

23. Defina “Segmentos dirigidos”, “Segmentos dirigidos equipolentes” y enuncie las propiedades de la relación de equivalencia.
24. Defina “Vector libre asociado a un segmento dirigido”. Defina “Números de dirección de un segmento dirigido” y “Componentes de un vector”. Ejemplifique.
25. Defina “Vectores colineales” y “Vectores coplanares”.
26. Defina “Suma de vectores” y enuncie sus propiedades.
27. Defina “Producto de un escalar por un vector” y enuncie sus propiedades.
28. Enuncie la relación entre vectores colineales y la operación producto de un vector por un escalar. Ejemplifique.
29. Defina “Módulo de un vector” en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Deduzca las fórmulas de cálculo en ambos casos.
30. Defina “Ángulo entre vectores”.
31. Defina “Producto punto entre dos vectores”. Enuncie sus propiedades. Ejemplifique el procedimiento de cálculo.
32. Deduzca la fórmula de cálculo del producto punto en $\mathbb{R}^2$.
33. Defina vector unitario. Deduzca la expresión que permite obtener un vector unitario de un vector dado. Ejemplifique.
34. Deduzca las expresiones de las proyecciones de un vector en dos direcciones perpendiculares (Proyección ortogonal de un vector sobre otro y Proyección de un vector ortogonal a otro). Ejemplifique.
35. Defina “Producto vectorial” ejemplifique y enuncie sus propiedades.
36. Deduzca la fórmula para obtener el área de un paralelogramo definido por dos vectores.
37. Demuestre que $u \times v$ es perpendicular a u y a v.
38. Defina “Producto triple” y enuncie sus propiedades. Explique el procedimiento de cálculo del producto mixto.
39. Dados dos puntos P y Q, de $\mathbb{R}^2$, deduzca todas las ecuaciones de la recta definida por dichos puntos.
40. Dados dos puntos P y Q, de $\mathbb{R}^3$, deduzca todas las ecuaciones de la recta definida por dichos puntos.
41. Dados tres puntos P, Q y R, de $\mathbb{R}^3$, deduzca todas las ecuaciones del plano definido por dichos puntos.
42. Explique qué información se obtiene de los coeficientes de la ecuación cartesiana de una recta de $\mathbb{R}^2$.
43. Explique qué información se obtiene de los coeficientes de la ecuación cartesiana de un plano de $\mathbb{R}^3$.
44. Explique qué información se obtiene de los coeficientes de las ecuaciones cartesianas de una recta de $\mathbb{R}^3$.

Modelo de 1º Parcial de Introducción a la Matemática

Ejercicios típicos del 1º parcial

1. Determine la condición que deben cumplir los escalares y_1, y_2, y_3; para que el sistema sea consistente (compatible):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = y_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = y_2 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = y_3 \end{cases}$$

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. En caso de tener más de una solución, indique la solución general y una particular.

a) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 7 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 12 \end{cases}$

3. En la siguiente desigualdad determine el conjunto de soluciones y grafíquelo.

$$|2 + x| > 1 - x$$

4. Determine si es inversible la matriz A. En caso afirmativo hallar la matriz A^{-1} .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Halle la matriz C tal que: $A\,B - 2\,C = -\,CB$, con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. ¿Qué condición, o condiciones, deben cumplir los escalares y_1, y_2 e y_3 para que el siguiente sistema sea compatible?

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & 4 & -8 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

7. Resuelva el sistema anterior para $y_1 = 5$; $y_2 = 3$ e $y_3 = 7$.

8. Dada la ecuación matricial $(A+2B)^{-1} = C$, calcule la matriz B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Resuelva la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{2}{1-x}\right| \leq 3$$

8. ¿Qué condiciones deben cumplir los escalares y_1, y_2 e y_3 para que el siguiente sistema sea compatible?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & 4 & -8 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

9. Resuelva el sistema anterior para $y_1 = 5$; $y_2 = 3$ e $y_3 = 7$.

10. Resuelva la siguiente desigualdad y grafique el conjunto solución.

$$\left|\frac{2}{x+1}\right| \geq 3$$

17. Halle la matriz C tal que: $A\,B - 2\,C = -\,CB$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Resuelva la siguiente inecuación y grafique el conjunto solución.

$$\left|\frac{3}{x-1}\right| \leq 2$$

19. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales. Escriba la solución general y una solución particular.

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

20. Resuelva el sistema homogéneo que tiene la misma matriz de coeficientes del ejercicio anterior. Escriba la solución general y una particular.

21. Halle la matriz C tal que: $-\,2\,C = -\,CB - A\,B$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Resuelva la siguiente desigualdad y grafique las soluciones.

$$\frac{x-2}{3+x} > 6$$

Para los ejercicios que siguen a continuación utilice los mismos puntos P, Q, R, S y T que se indican:

Sean P= (1,-2,3), Q=(3,1,0), R=(0,2,-1), S=(-3,1,2), T=(2,0,0).

23) Descomponga el vector Q-P, en una dirección paralela y otra perpendicular al vector S-R.

24) Obtenga un vector unitario y otro de módulo 3, ambos de sentido opuesto, al vector Q-P.

25) Obtenga el ángulo entre los vectores Q-P y S-R.

26) Obtenga el ángulo entre las rectas definidas por los puntos Q y P, la primera, y R y S, la segunda.

27) Obtenga todas las ecuaciones de la recta definida por los puntos P y Q.

28) Obtenga todas las ecuaciones del plano definido por los puntos P, Q y R.

29) Calcule las áreas del paralelogramo y del triángulo definidos por los puntos P, Q y R.

30) Determine la posición relativa de las rectas definidas por P y Q, la primera; y por R y S, la segunda.

31) Determine la posición relativa de la recta definida por P y Q, y el plano definido por R, S y T.

32) Determine la posición relativa de los planos definidos por P, Q y R, el primero; y por S, T y el origen del sistema de coordenadas, el segundo.

33) Halle la distancia entre el origen del sistema y el plano definido por los puntos P, Q y R.

34) Halle la distancia entre el punto P y la recta definida por los puntos Q y R.