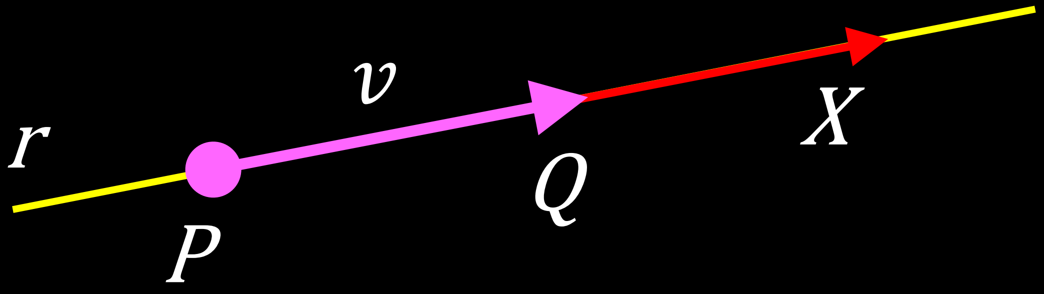
RECTA Y PLANO

Recta



Sean P y Q puntos no coincidentes.

$$X \in r \Leftrightarrow X - P \parallel Q - P \Leftrightarrow X - P = \lambda(Q - P)$$

$\boxed{\boldsymbol{X = P + \lambda(Q - P)}}$ Ecuación paramétrica vectorial de la recta

$v = Q - P$ vector director de la recta ; λ: parámetro

Dada la ecuación paramétrica vectorial de una recta, se puede escribir una ecuación por cada componente:

Sea $X = P + \lambda(Q - P) = P + \lambda v$ Ecuación paramétrica vectorial de la recta

Ecuaciones paramétricas escalares de la recta

En $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$

En $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Cualquier vector colineal a v, puede ser vector director de r.
Rectas paralelas tienen vectores directores colineales.

Ejemplo

1) Sea r: $X = (2,-1) + t(3,-1)$ recta de $\mathbb{R}^2$.
Escriba la ecuación de una recta r', paralela a r, que contenga al punto $Q = (4,2)$.

$$\boxed{r' : X = (4,2) + k(3,-1)}$$

2) Determine si son paralelas las rectas
$l: X = (-1,2,4) + \lambda\,(3,2,-1)$ y $l': X = (-2,3,1) + \mu(-6,-4,1)$
Vectores directores de l y l': $u = (3,2,-1)$ y $v = (-6,-4,1)$.
$u \parallel v \Leftrightarrow u = tv$, para algún $t \epsilon \mathbb{R}$.

$u = tv$: $\quad (3,2,-1) = t(-6,-4,1)$

que equivale a $\begin{cases} -6t = 3 \Rightarrow t = -{}^{1}\!/_{2} \\ -4t = 2 \Rightarrow t = -{}^{1}\!/_{2} \\ t = -1 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$

El sistema no tiene solución, por tanto, las rectas no son paralelas.

Ejemplo Sean $P=(-2,3);\ Q=(1,-2)$.

Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta definida por P y Q.

Indique si los puntos $R=(-4,1)$ y $S=(-8,13)$ pertenecen a r.

$\boxed{X=(-2,3)+t(3,-5)}$ Ecuación paramétrica vectorial de r.

$\boxed{\begin{cases} x_1=-2+3t \\ x_2=3-5t \end{cases}}$ Ecuaciones paramétricas escalares de r.

¿$R\in r$?: $\begin{cases} -4=-2+3t \\ 1=3-5t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=-2/3 \\ t=2/5 \end{cases}$ Sist. incomp.$\Longrightarrow \boxed{R\notin r}$

¿$S\in r$?: $\begin{cases} -8=-2+3t \\ 13=3-5t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=-2 \end{cases}$ Solución: $t=-2 \Longrightarrow \boxed{S\in r}$

Ecuaciones cartesianas de la recta

En $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$

Si $v_1 v_2 \neq 0$:

$$\lambda = \boxed{\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}}$$

En $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Si $v_1 v_2 v_3 \neq 0$:

$$\lambda = \boxed{\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}}$$

Ecuaciones cartesianas (forma simétrica)

En $\mathbb{R}^2$ una recta tiene una ecuación cartesiana; en $\mathbb{R}^3$ una recta tiene dos ecuaciones cartesianas.

Ecuaciones cartesianas de la recta

En $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2}$$

En $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} \quad \text{y} \quad \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$$

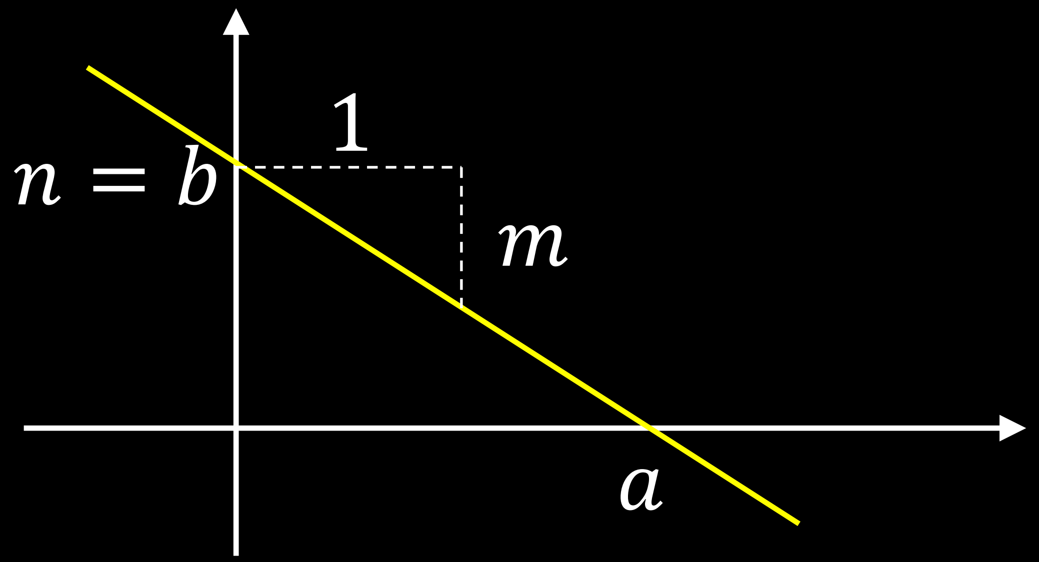
Multiplicando las ecuaciones por el producto de los denominadores y ordenando los términos:

$$\boxed{Ax + By = C}$$

$$\boxed{\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}}$$

Ecuaciones cartesianas (forma general o implícita)

Ecuaciones cartesianas de la recta



En $\mathbb{R}^2$:

$Ax + By = C$

Si $B \neq 0$:

$$\boxed{y = mx + n}$$

Ecuación cartesiana (forma explícita)

m: pendiente;

n: ordenada al origen

Si $ABC \neq 0$:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Ecuación cartesiana (forma segmentaria)

a: abscisa al origen

b: ordenada al origen

Ejemplo Sean $P=(-2,3);\ Q=(1,-2)$.

Escriba todas las ecuaciones de la recta definida por P y Q.

$$\boxed{X=(-2,3)+t(3,-5)}$$ Ec. param. vectorial de la recta r.

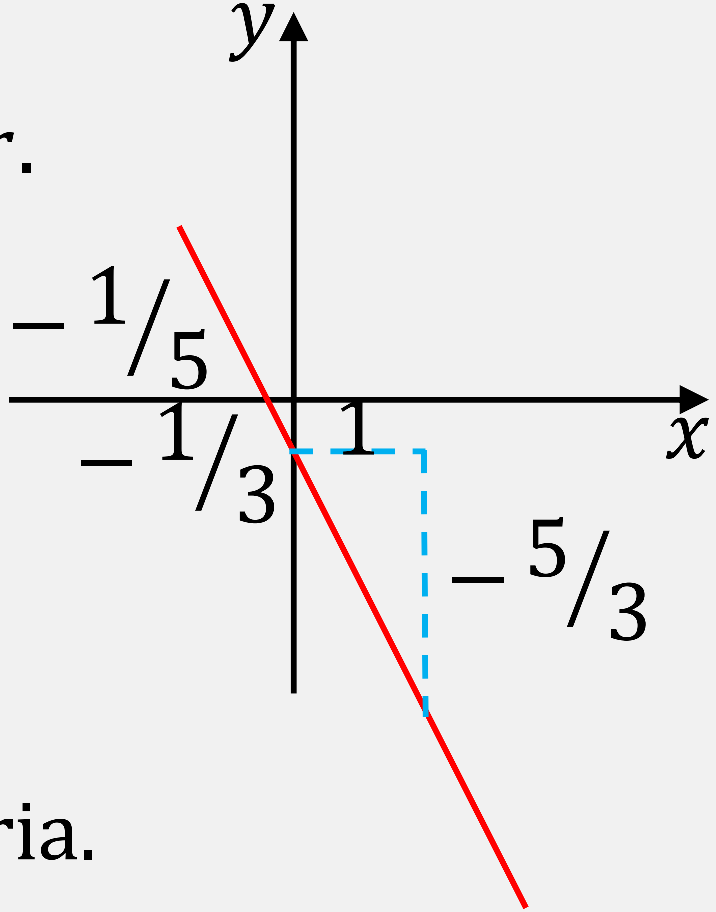
$$\boxed{\begin{cases} x_1=-2+3t \\ x_2=3-5t \end{cases}}$$ Ec. param. escalares de r.

$$\boxed{\frac{x_1+2}{3}=\frac{x_2-3}{-5}}$$ Ec. cartesiana simétrica.

$$\boxed{-5x_1-3x_2=1}$$ Ec. cartesiana implícita.

$$\boxed{x_2=-\frac{5}{3}x_1-\frac{1}{3}}$$ Ec. cartesiana explícita.

$$\boxed{\frac{x_1}{-\frac{1}{5}}+\frac{x_2}{-\frac{1}{3}}=1}$$ Ec. cartesiana segmentaria.



Ejemplo Sean $P = (-2,1,3);\ Q = (1,1,-2)$.

Escriba todas las ecuaciones de la recta definida por P y Q.

$X = (-2,1,3) + t(3,0,-5)$ Ec. param. vectorial de la recta r.

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 3t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 - 5t \end{cases}$$

Ec. param. escalares de r.

Despejando t de la 1° y 3° ecuaciones y escribiendo la 2° ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ -5x_1 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Ecuaciones cartesianas

No se puede escribir la forma simétrica pues no se puede despejar t de la 2°ecuación paramétrica.

Ejemplo Sea la recta de $\mathbb{R}^3$ cuyas ecuaciones cartesianas son

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ -5x_1 - 3x_3 = 1 \end{cases}.$$ Obtenga las ecuaciones paramétricas.

Resolveremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{12}} \begin{bmatrix} -5 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1^{(-1/5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: $\boxed{(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{5}, 1{,}0\right) + t\left(-\frac{3}{5}, 0{,}1\right)}$

La solución es la ecuación paramétrica vectorial de la recta.

Ejemplo Escriba las ecuaciones de la recta coincidente con el eje x.

Dos puntos que pertenecen al eje x son los puntos $(0,0,0)$ y $(1,0,0)$.

Ecuación paramétrica vectorial de la recta:

$$\boxed{X = k(1,0,0)}$$

Ecuaciones paramétricas escalares: $\boxed{\begin{cases} x = k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$

Ecuaciones cartesianas: $\boxed{\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$

Plano

Sean P, Q y R puntos no alineados.

$$X \in \pi \Leftrightarrow X - P = \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

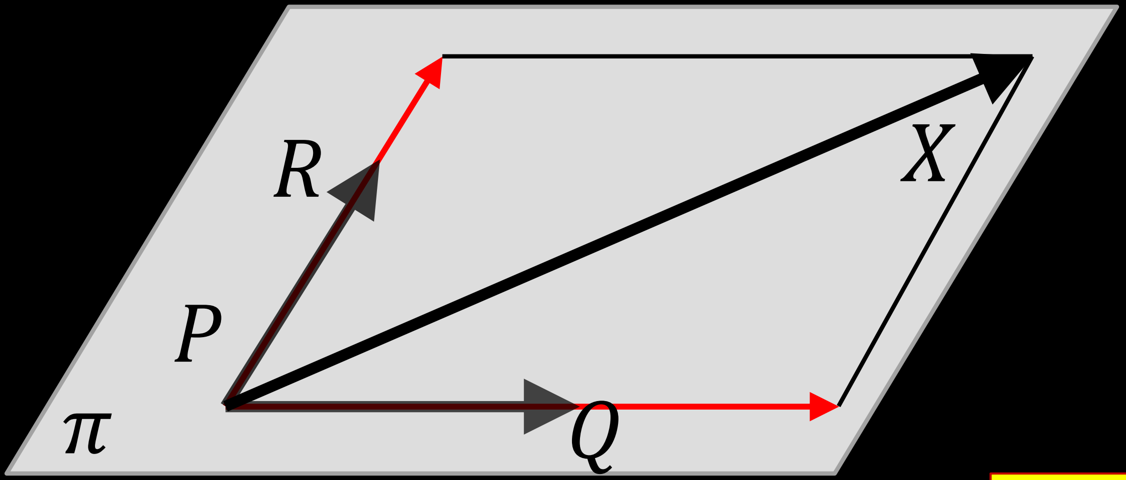
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)}}$$

Ecuación paramétrica vectorial del plano

$$\left.\begin{array}{l} u = Q - P \\ v = R - P \end{array}\right\} \text{vectores directores de } \pi$$

λ y μ: parámetros



Dada la ecuación paramétrica vectorial de un plano, se puede escribir una ecuación por cada componente:

$$X = P + \lambda u + \mu v$$

Ecuación paramétrica vectorial del plano

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas escalares del plano

Dos planos son paralelos si los vectores directores de cada uno son combinación lineal de los vectores directores del otro.

Ejemplo

Sean los planos $\begin{cases} \pi_1: X = (-2,3,1) + \alpha \underbrace{(2,3,1)}_{u} + \beta \underbrace{(3,-1,0)}_{v} \\ \pi_2: X = (2,0,-1) + \gamma \underbrace{(5,2,1)}_{u'} + \delta \underbrace{(0,-1,0)}_{v'} \end{cases}$

Determine si los planos son paralelos.

Veremos si u y v son combinaciones lineales de u' y v'.

$¿u = \gamma\, u' + \delta\, v'?$:

$$\text{I:} \begin{cases} 5\gamma = 2 \\ 2\gamma - \delta = 3 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$¿v = \gamma\, u' + \delta\, v'?$:

$$\text{II:} \begin{cases} 5\gamma = 3 \\ 2\gamma - \delta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Los sistemas I y II son incompatibles, por tanto, los vectores u y v no son combinaciones lineales de u' y v'.

Los planos no son paralelos.

Ecuación cartesiana del plano

Sean las ecuaciones paramétricas escalares de un plano:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Considerando los parámetros como incógnitas se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} u_1\lambda + v_1\mu = x - p_1 \\ u_2\lambda + v_2\mu = y - p_2 \\ u_3\lambda + v_3\mu = z - p_3 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, la condición de compatibilidad es

$$\boxed{\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}}$$

Ecuación cartesiana del plano

Ejemplo Sean $A=(-1,2,3)$; $B=(0,-2,1)$; $C=(1,0,1)$

Escriba todas las ecuaciones del plano definido por A, B y $C.$

Ec. param. vectorial: $\boxed{X=(-1,2,3)+t(1,-4,-2)+k(2,-2,-2)}$

Ecuaciones paramétricas escalares:

$$\boxed{\begin{cases} x=-1+t+2k \\ y=2-4t-2k \\ z=3-2t-2k \end{cases}} \Longrightarrow \begin{cases} t+2k=x+1 \\ -4t-2k=y-2 \\ -2t-2k=z-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ -4 & -2 & y-2 \\ -2 & -2 & z-3 \end{bmatrix} \xrightarrow[e_{31}^{(2)}]{e_{21}^{(4)}}$$

$$\xrightarrow[e_{31}^{(2)}]{e_{21}^{(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 0 & 6 & 4x+y+2 \\ 0 & 2 & 2x+z-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{32}^{(-1/3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 0 & 6 & 4x+y+2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+z-\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible debe cumplirse:

$\boxed{{}^{2}/_{3}\,x-{}^{1}/_{3}\,y+z-{}^{5}/_{3}=0}$ Ecuación cartesiana del plano

Ejemplo Sea la ecuación cartesiana de un plano $2x - y = 3$.

Encuentre las ecuaciones paramétricas.

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales: $2x - y = 3$.

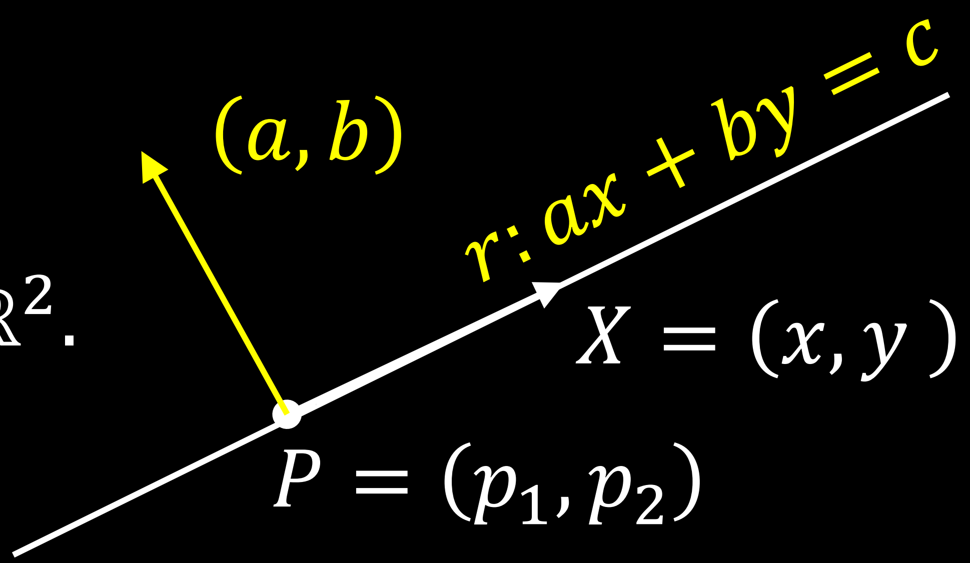
Matriz aumentada: $[2 \quad -1 \quad 0 \quad 3] \xrightarrow{e_1^{(1/2)}} [1 \quad -1/2 \quad 0 \quad 3/2]$

Solución:

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 0,0\right) + t\left(\frac{1}{2}, 1,0\right) + k(0,0,1)}$$

Ecuación paramétrica vectorial del plano

Interpretación geométrica de los coeficientes de las ecuaciones cartesianas



Sea $ax + by = c \qquad (1)$

la ecuación cartesiana de una recta r de $\mathbb{R}^2$.

Sea $P = (p_1, p_2) \in r$, por lo que

$ap_1 + bp_2 = c \qquad (2)$

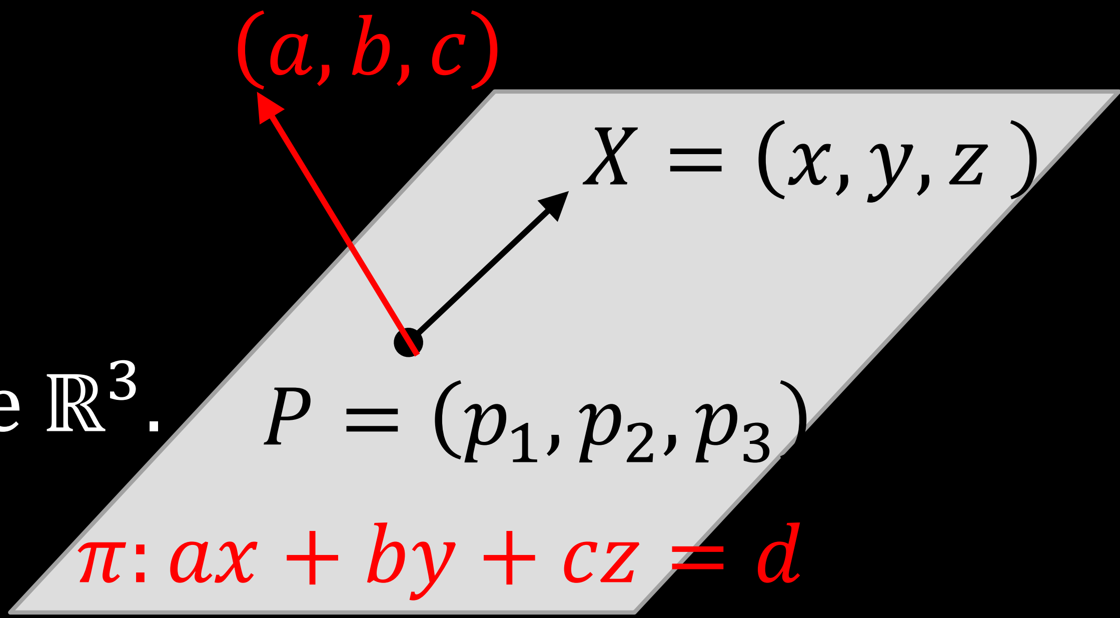
Restando miembro a miembro las igualdades (1) y (2):

$a(x - p_1) + b(y - p_2) = 0$ que puede escribirse como

$(a, b).(x - p_1, y - p_2) = 0$, por lo que $(a, b) \perp (x - p_1, y - p_2)$

Como $X - P$ es un vector que tiene la dirección de la recta r, resulta que el vector (a, b) es perpendicular a r.

Interpretación geométrica de los coeficientes de las ecuaciones cartesianas



Sea $ax + by + cz = d$

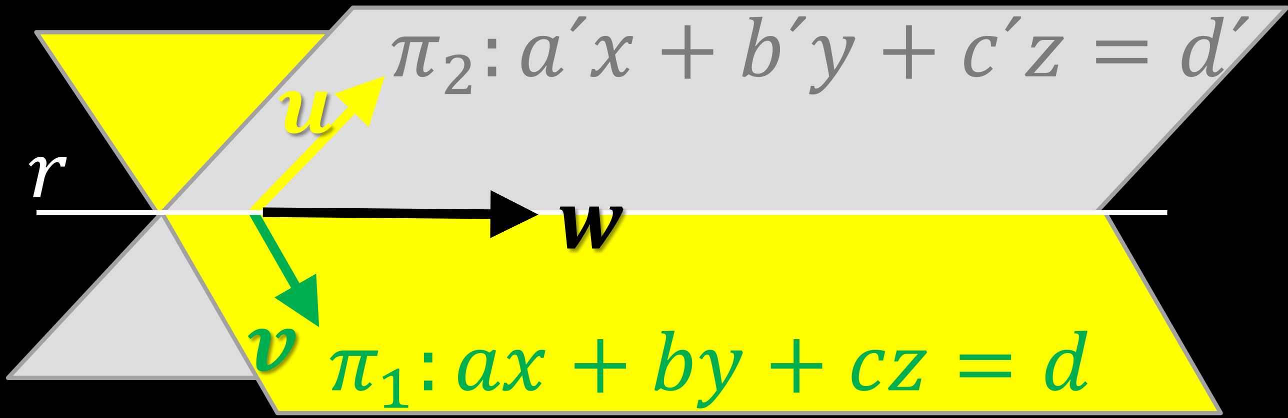
la ecuación cartesiana de un plano πde $\mathbb{R}^3$.

Sea $P = (p_1, p_2, p_3) \in \pi$.

Con el mismo procedimiento que el empleado para el caso de una recta de $\mathbb{R}^2$, se concluye que $(a, b, c) \perp (x - p_1, y - p_2, z - p_3)$

Como $X - P$ es un vector del plano π, resulta que el vector (a, b, c) es perpendicular a π.

Interpretación geométrica de los coeficientes de las ecuaciones cartesianas



Sean $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

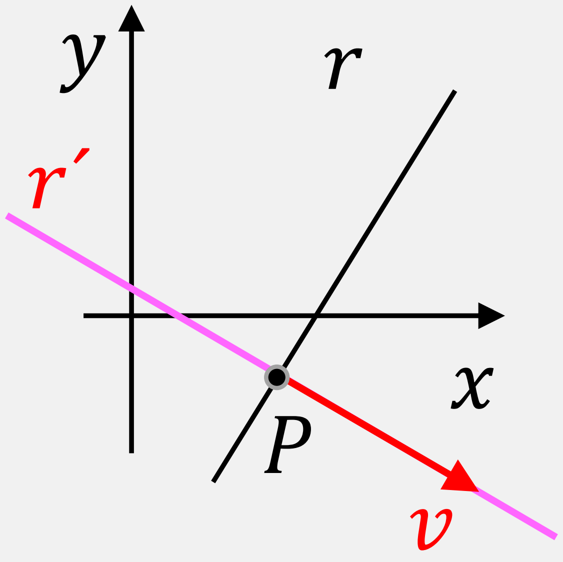
las ecuaciones cartesianas de una recta r de $\mathbb{R}^3$. Cada una de las ecuaciones es la ecuación de un plano. La recta es la intersección de ambos planos. Los vectores $u = (a, b, c)$ y $v = (a', b', c')$ son perpendiculares a cada plano. El vector $w = u \times v$ es perpendicular a u y a v, por tanto, tiene la dirección de la recta r.

Ejemplo

Sea la recta r: $2\mathrm{x}-\mathrm{y}=4$ de $\mathbb{R}^2$.

Halle la ecuación de una recta $r´$, que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P=(3,-1)$.

Ecuación paramétrica vectorial de $r´$:



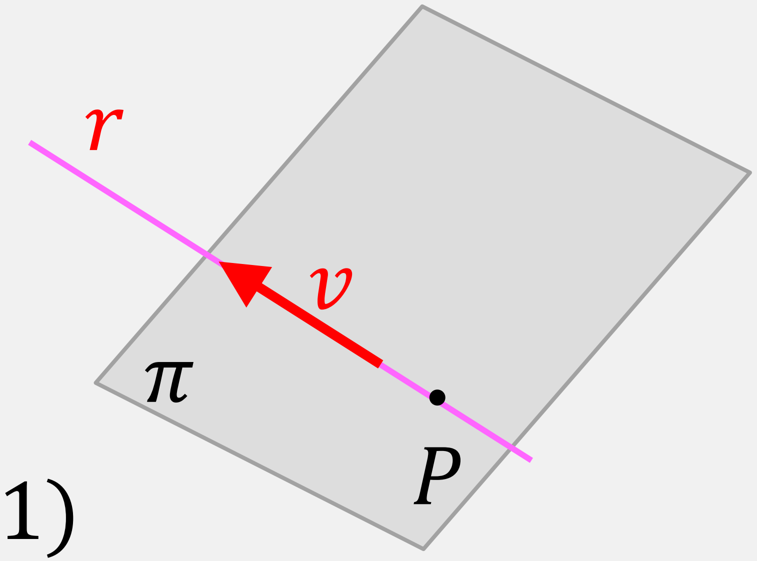
$$X=P+tv$$

$$P=(3,-1) \qquad v=(2,-1)$$

$$\boxed{r´: X=(3,-1)+t(2,-1)}$$

Ejemplo Sea el plano π: 3x − y + z =2.

Halle la ecuación de una recta r, que sea perpendicular a π y que pase por el punto $P = (0, -3,1)$.



Ecuación paramétrica vectorial de r:

$$X = P + tv$$

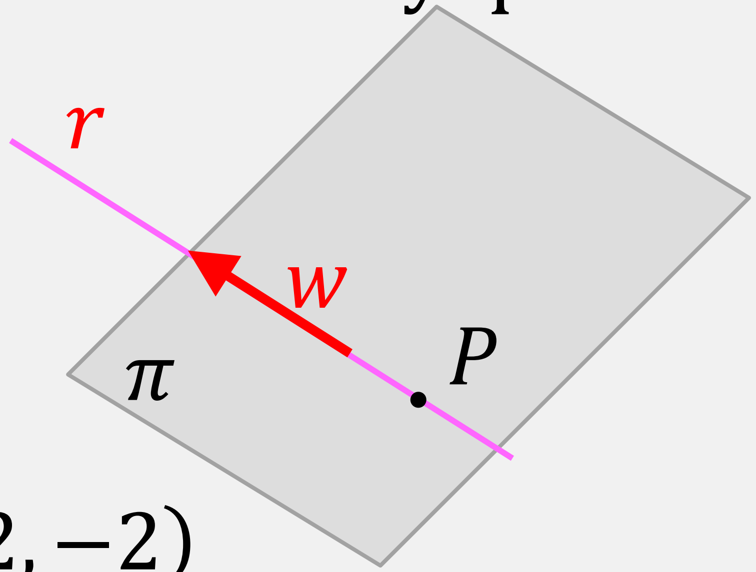
$$P = (0, -3,1) \qquad v = (3, -1,1)$$

$$\boxed{r: X = (0, -3,1) + t(3, -1,1)}$$

Ejemplo

Sea la recta de $\mathbb{R}^3$ $\quad r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$

Halle la ecuación de un plano π, que sea perpendicular a r y que pase por el punto $P = (0, -3, 1)$.



Vector w perpendicular a π:

$w = u \times v; \qquad u = (1, 1, -1); \quad v = (3, -1, 1)$

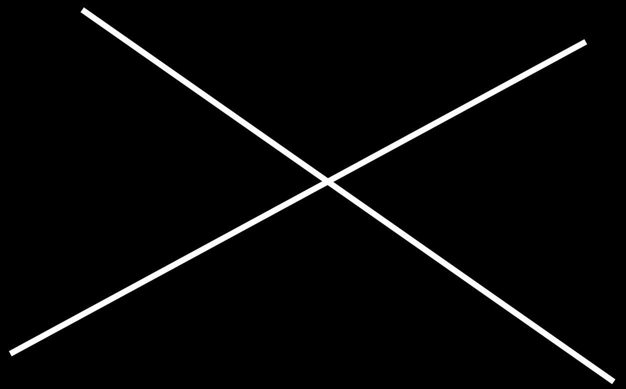
$w = (2, -4, -4)$. Se puede adoptar: $w = (1, -2, -2)$

$\pi: x - 2y - 2z = d$; dado que $P \in \pi$: $(0) - 2(-3) - 2(1) = 4 = d$

En definitiva la ecuación del plano π es : $\boxed{x - 2y - 2z = 4}$

Intersección y paralelismo de rectas de $\mathbb{R}^2$

1

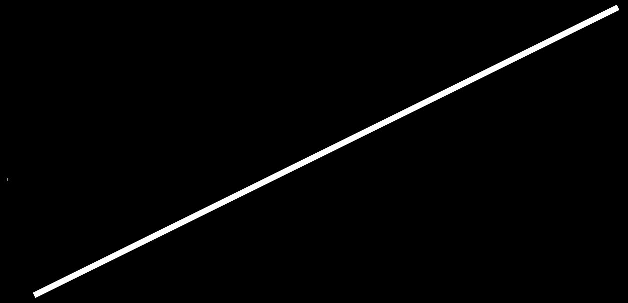


Rectas concurrentes:
Las rectas tienen un único punto en común

2

Rectas paralelas no coincidentes:
Las rectas no tienen puntos en común

3



Rectas paralelas coincidentes:
Las rectas tienen infinitos puntos en común

Ejemplo Sean las rectas $r: 2x - y = 1$ y $r': x = 4$.

Determine la posición relativa de ambas.

Formamos un sistema con las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x \qquad = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{21}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_{2}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

La solución es única por tanto $\boxed{\text{las rectas son concurrentes.}}$ El punto de intersección es la solución: $\boxed{I = (4,7).}$

Ejemplo

Sean las rectas $r: 2x - y = 1$ y $r': X = (4,7) + k(1,2)$.

Determine la posición relativa de ambas.

Introduciremos los valores de x y de y, de la ecuación paramétrica, en la ecuación cartesiana.

$2(4 + k) - (7 + 2k) = 1$ nos queda un sistema de una ecuación con una incógnita.

$0k = 0$ El sistema tiene infinitas soluciones: $k \in \mathbb{R}$. Por tanto,

las rectas son paralelas coincidentes.

Ejemplo Sean $r: X = k(1,-2)$ y $r': X = (4,7) + k(-1,2)$.

Determine la posición relativa de ambas.

De r obtendremos la ecuación cartesiana.

$\begin{cases} x = k \\ y = -2k \end{cases} \Longrightarrow k = x = -\frac{1}{2}y$ Ecuación cartesiana: $x + \frac{1}{2}y = 0$

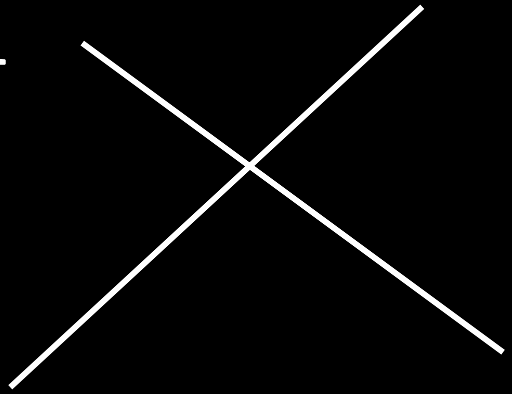
Introducimos x e y, de la ecuación paramétrica en la cartesiana:

$(4-k) + \frac{1}{2}(7+2k) = 0 \Longrightarrow 0k = -\frac{15}{2}$ Sistema incompatible.

Las rectas son paralelas no coincidentes.

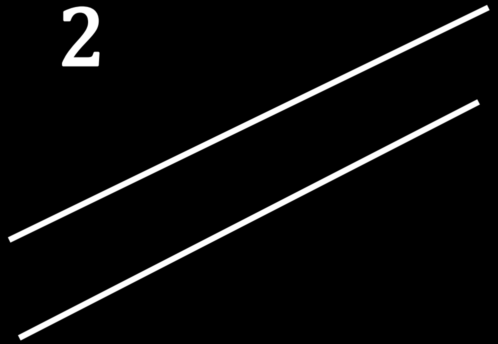
Intersección y paralelismo de rectas de $\mathbb{R}^3$

1



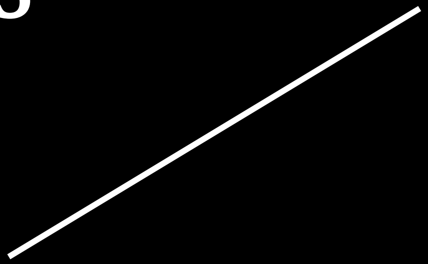
Rectas concurrentes: Las rectas tienen un único punto en común

2



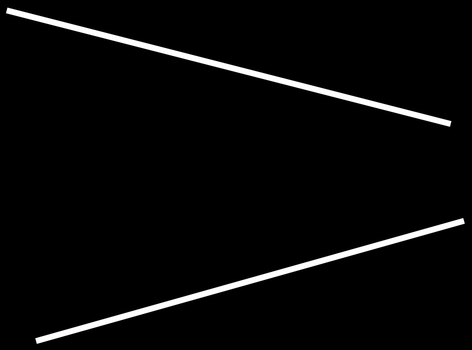
Rectas paralelas no coincidentes: Las rectas no tienen puntos en común

3



Rectas paralelas coincidentes: Las rectas tienen infinitos puntos en común

4



Rectas alabeadas: Las rectas no tienen puntos en común y no son paralelas

Ejemplo

Sean $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y $r': \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$, rectas de $\mathbb{R}^3$.

Determine la posición relativa de ambas.

Formamos un sistema con todas las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{e_1}{\rightarrow} \dots \overset{e_k}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

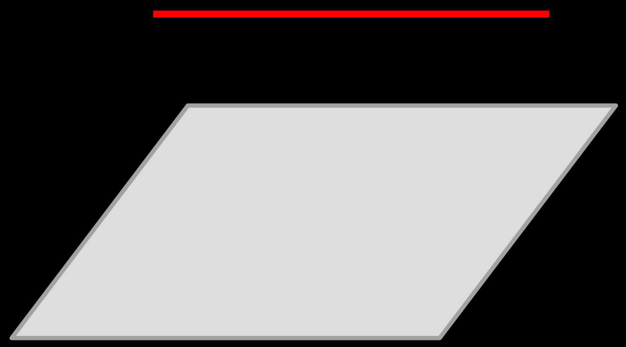
El sistema es incompatible, no tienen puntos en común.

Son paralelas no coincidentes o alabeadas, según si los vectores directores son paralelos o no.

Los vectores directores son $u = (-1, -1, 1)$; $v = (1, -1, 1)$; se obtienen con el producto vectorial de los vectores cuyas componentes son los coeficientes de las ecuaciones cartesianas de las rectas. Los vectores no son paralelos, por lo que $\boxed{\text{las rectas son alabeadas.}}$

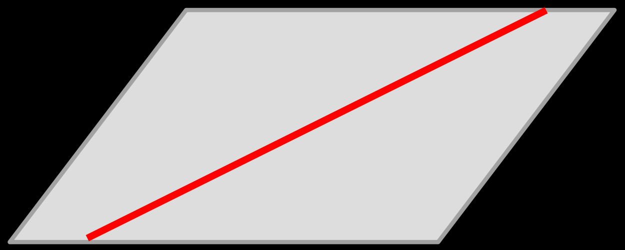
Intersección y paralelismo de rectas y planos

1



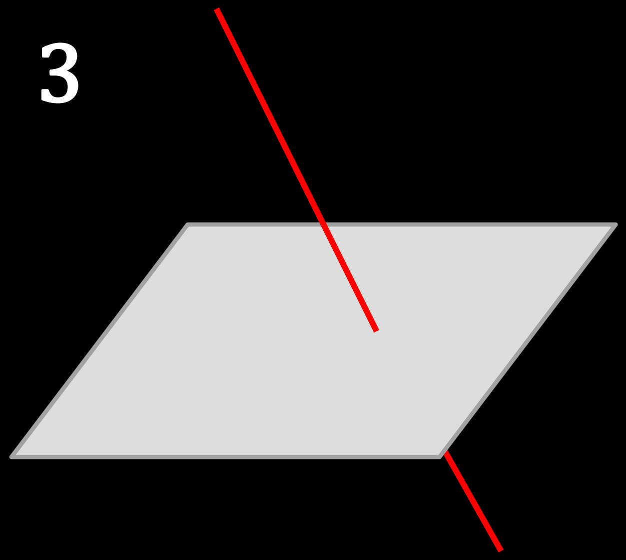
La recta es paralela al plano y no está contenida en él. No tienen puntos en común.

2



La recta está contenida en el plano. Tienen infinitos puntos en común.

3



El plano corta a la recta en un punto. Tienen un único punto en común.

Ejemplo Sean $r\colon X = (1,0,2) + t(-1,0,1)$ y $\pi\colon 2x - z = 1$.

Determine la posición relativa de ambos.

Introducimos la ecuación paramétrica en la cartesiana:

$$2(1-t) - (2+t) = 1$$

Obtenemos el sistema: $-3t = 1$, cuya única solución es $t = -\frac{1}{3}$.

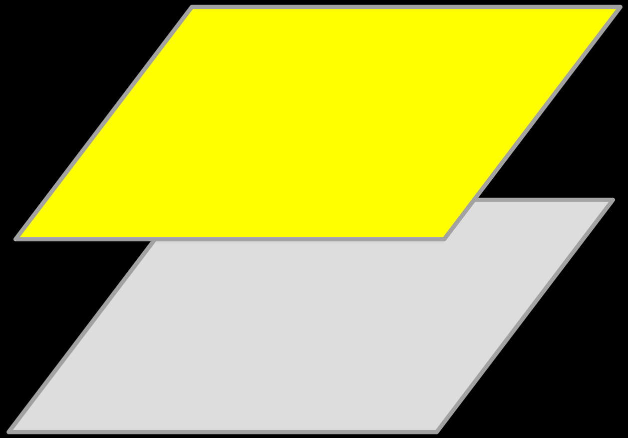
Reemplazamos en la ecuación paramétrica el valor hallado de t:

$$I = (1,0,2) - \frac{1}{3}(-1,0,1) = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$$

El plano corta a la recta en el punto $I = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$

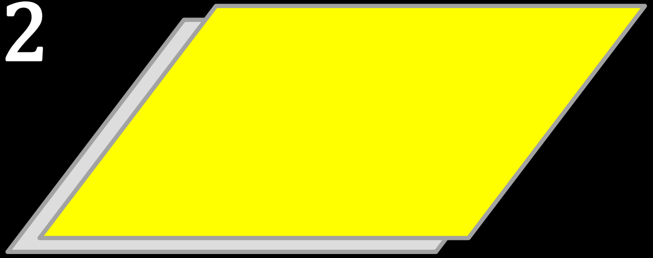
Intersección y paralelismo de planos

1



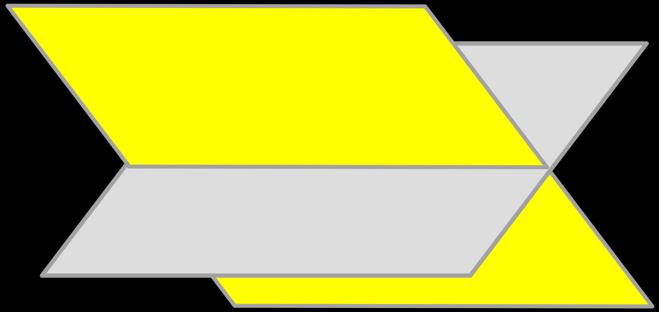
Los planos son paralelos no coincidentes. No tienen puntos en común.

2



Los planos son paralelos coincidentes. Tienen infinitos puntos en común. La intersección es un plano.

3



Los planos se cortan. Tienen infinitos puntos en común. La intersección es una recta.

Ejemplo Sean π: $x - z = 1$ y el plano ρ definido por los ejes x e y. Determine la posición relativa de ambos.

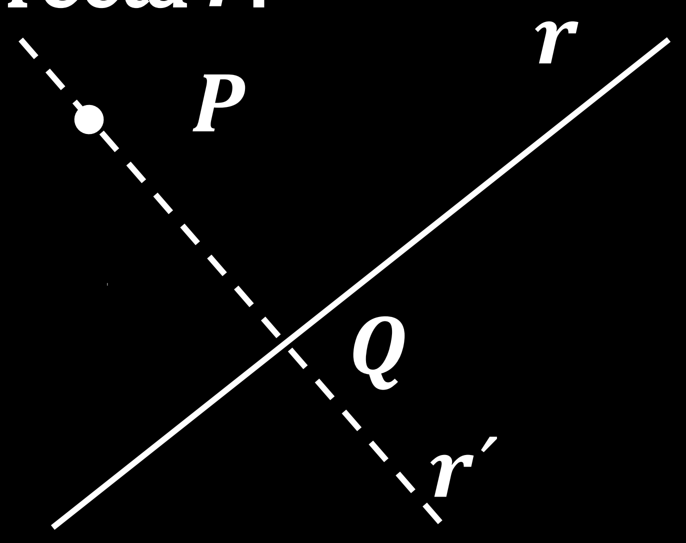
Ecuación cartesiana del plano ρ: Puesto que el eje z es perpendicular a ρ, el vector $(0,0,1)$ es perpendicular al plano, por lo que la ecuación cartesiana es $z = d$. Como $(0,0,0) \in \rho$, $0 = d$; y la ecuación de ρ es: $z = 0$.

Resolvemos el sistema $\begin{cases} x - z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

La solución es $X = (1,0,0) + t(0,1,0)$ que es la ecuación de una recta, por lo que los planos se cortan.

Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$

Se desea hallar la distancia de un punto P a una recta r.



Procedimiento

1. Trazamos una recta $r´$, perpendicular a r,

   que contenga a l punto P.

2. Hallamos la intersección entre r y $r´$.

   $Q = r \cap r´$ es el punto de r más cercano a P.

3. Determinamos la distancia de P a Q: $d(P, Q)$.

Ejemplo Sean r: $x - y = 1$ y $P = (3,1)$.

Calcule la distancia entre ambos.

1. $r': X = (3,1) + t(1,-1)$
2. $r \cap r'$: $(3+t) - (1-t) = 1$

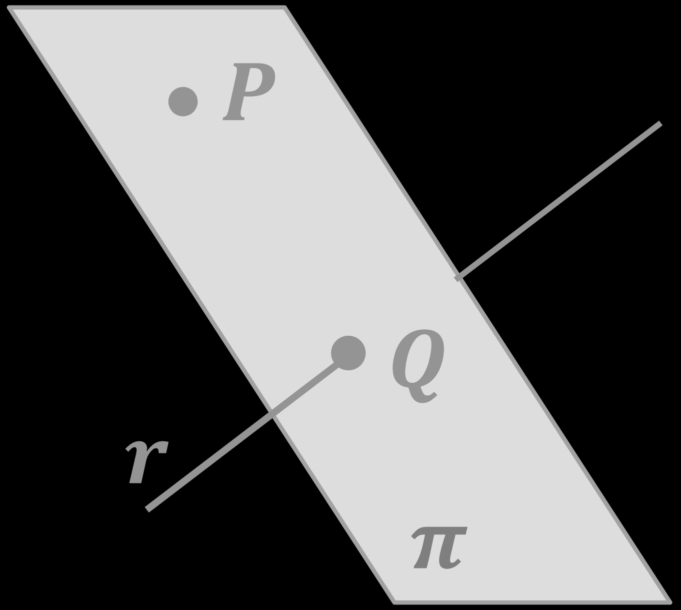
$$2t = -1 \Longrightarrow t = -\frac{1}{2} \qquad Q = (3,1) - \frac{1}{2}(1,-1) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$\boxed{Q = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ punto de } r \text{ más cercano a } P.}$

3. $d(P,Q) = \|Q - P\| = \left\|\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$

Se desea hallar la distancia de un punto P a una recta r.



Procedimiento

1. Trazamos un plano π, perpendicular a r,

   que contenga a l punto P.

2. Hallamos la intersección entre r y π.

   $Q = r \cap \pi$ es el punto de r más cercano a P.

3. Determinamos la distancia de P a Q: $d(P, Q)$.

Ejemplo Sean r: $X = (-1,3,2) + k(1,0,1)$ y $P = (3,1,0)$.

Calcule la distancia entre ambos.

1. π: $x + z = d$; $P \in \pi$: $(3) + (0) = 3 = d$; π: $x + z = 3$
2. $r \cap \pi$: $(-1 + k) + (2 + k) = 3$

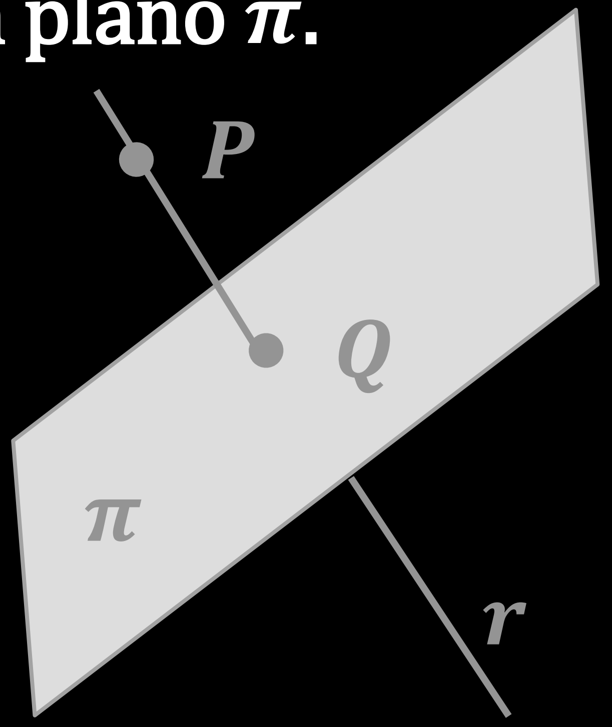
   $2k = 2 \Longrightarrow t = 1$ $\quad Q = (-1,3,2) + (1,0,1) = \boxed{(0,3,3)}$

   punto de r más cercano a P.
3. $d(P, Q) = \|Q - P\| = \|(-3,2,3)\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 3^2} =$

$$= \boxed{\sqrt{22}}$$

Distancia de un punto a un plano

Se desea hallar la distancia de un punto P a un plano π.



Procedimiento

1. Trazamos una recta r, perpendicular a π,

   que contenga a l punto P.

2. Hallamos la intersección entre r y π.

   $Q = r \cap \pi$ es el punto de π más cercano a P.

3. Determinamos la distancia de P a Q: $d(P, Q)$.

Ejemplo Sean $\pi: 2x - y + z = 2$ y $P = (3,1,0)$.

Calcule la distancia entre ambos.

1. $r: \quad X = (3,1,0) + k(2,-1,1)$
2. $r \cap \pi: \; 2(3+2k) - (1-k) + (k) = 2$

$$6k = -3 \Longrightarrow k = -\frac{1}{2} \; ; \qquad Q = (3,1,0) - \frac{1}{2}(2,-1,1) = \boxed{\left(2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$$

punto de π más cercano a P.

3. $d(P,Q) = \|Q - P\| = \left\|\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\| =$

$$= \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$