Práctico 7: Vectores – Operaciones con vectores

Ejercicio 1:

Sean u=(1,-3,5); v=(0,-2,-1). Hallar el vector x tal que: -3u+2x=5v+3x

Respuesta:

2x-3x=3u+5v

-x=3u+5v

x=-3u-5v=-3(1,-3,5)-5(0,-2,-1)=(-3,19,-10)

Ejercicio 2:

Dado el triángulo de vértices A= (-2,-1,4); B= (-1,3,5) y C=(4,5,1), hallar el ángulo en el vértice A.

Respuesta:

u = B - A = (-1,3,5) - (-2,-1,4) = (1,4,1)

v = C - A = (4,5,1) - (-2,-1,4) = (6,6,-3)

$$\theta = \arccos \frac{6+24-3}{\sqrt{1+16+1}\,\sqrt{36+36+9}} = \arccos \frac{27}{\sqrt{18}\,9} = 45°$$

Ejercicio 3:

Sean u=(1,-2,3), v=(7,5,4). Se pide hallar la proyección ortogonal de u sobre v y la proyección de u ortogonal a v.

Respuesta:

$\text{proy}_v\, u = u_1 = \frac{u.v}{v.v} v = \frac{9}{90}(7,5,4)$ proyección ortogonal de u sobre v

$u_2 = u - u_1$ proyección de u ortogonal a v

Ejercicio 4:

Sea u=(3,-4); hallar un vector unitario paralelo a u y de igual sentido que u; otro unitario y de sentido opuesto a u; y otro de módulo 3 paralelo a u.

$u` = \frac{1}{\|u\|}u = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ vector unitario de u y de igual sentido que u

$u`` = -\frac{1}{\|u\|}u = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ vector unitario de u y de sentido opuesto a u

$u``` = 3u` = 3\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ vector de módulo 3 paralelo a u

Ejercicio 5:

Sean u=(1,2,-1); v=(-2,-4,2). ¿Es u//v?

Respuesta:

u//v si y solo si u = kv

(1,2,-1)=k(-2,-4,2)

1=-2k ==> k = -1/2

2=-4k ==> k = -1/2

-1=2k ==> k = -1/2

El sistema tiene solución, existe un número k (único) tal que u=kv, entonces los vectores son paralelos.

Ejercicio 6:

Sean u=(1,3,-1); v=(-3,1,0). ¿Son u y v perpendiculares?.

Respuesta:

u.v= -3+3+0=0 ==> $u \perp v$

Ejercicio 7:

Sean u=(2,-5,8); v=(1,-1,7); w=(3,-2,9). Hallar uxv y uvw (producto triple de u , v y w).

Respuesta:

uxv: $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ . & . & . \end{bmatrix}$; $uxv = \left(C_{31}, C_{32}, C_{33}\right) = (-27, -6, 3)$

(uxv).w: $D\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 9 \end{bmatrix} = 3(-27) + (-2)(-6) + 9x3 = -42$

Ejercicio 8 :

Sean a=(1,3) ; b=(3,3) ; c=(2,1). Hallar m y n tales que :

ma+nb=c

Respuesta :

m(1,3)+n(3,3)=(2,1)

Esta ecuación vectorial equivale al sistema de ecuaciones lineales que sigue a continuación:

$$\begin{cases} m + 3n = 2 \\ 3m + 3n = 1 \end{cases}$$

La solución de este sistema es (m,n)=(-1/2,5/6) . Única solución, esto es así porque la reducida por filas de la matriz de coeficientes es la matriz identidad.

Ejercicio 9:

Hallar los vectores u y v tales que:

u+v=(1,0) y u-v=(0,1)

Respuesta:

Las ecuaciones 1 y 2 equivalen al sistema: $\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_2 = 0 \\ u_1 - v_1 = 0 \\ u_2 - v_2 = 1 \end{cases}$ este sistema tiene 4 ecuaciones y cuatro incógnitas u_1, u_2, v_1, v_2.

Resolviendo el sistema se obtiene: u=(1/2,1/2) y v=(1/2,-1/2).

Ejercicio 10:

Sean las fuerzas F_1=(2,3,5) y F_2=(-3,1,11) que actúan sobre un cierto cuerpo. ¿Están las fuerzas en equilibrio?¿Qué fuerza habría que aplicar para restablecer el equilibrio?.

Respuesta:

Para que las fuerzas estén en equilibrio su resultante debe ser nula.

F_1+F_2= (-1,4,16), las fuerzas no están en equilibrio.

La fuerza que restablece el equilibrio es la fuerza F tal que F+(-1,4,16)=(0,0,0);

Entonces F=-(-1,4,16)=(1,-4,-16)

Ejercicio 11:

Sean u=(2,0,1), v=(3,2,0), w=(1,0,3). ¿Es el vector r=(-3,-4,-1) combinación lineal de u, v y w?

Respuesta:

Sean x , y , z escalares.

Si (-3,-4,-1) es combinación lineal de u, v y w, según los escalares x, y z, entonces

xu + yv + zw = (-3,-4,-1)

Con esta ecuación vectorial se construye el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -3 \\ 2y = -4 \\ x + 3z = -1 \end{cases}$$

La solución es (x,y,z)=(2,-2,-1), lo que implica que el vector (-3,-4,-1) es combinación lineal de u, v y w. Si el sistema fuera incompatible, entonces el vector (-3,-4,-1) no sería combinación lineal de los vectores u, v y w.

Ejercicio 13:

¿Para qué valor de k, los siguientes vectores son colineales? u=(2,k,-10); v=(3,8,-15).

Respuesta:

Para que sean paralelos debe cumplirse: (2,k,-10)=t(3,8,-15) que esquivale al siguiente sistema de tres ecuaciones con la incógnita t. Para que sean paralelos el sistema debe tener solución.

2=3t ==> t=2/3

k=8t ==> t=k/8=2/3 ==> k=16/3

-10=-15t ==> t=2/3

El sistema anterior tiene solución si t es el mismo (2/3) en las tres ecuaciones. Entonces k debe ser igual a 16/3 para que los vectores sean paralelos.

Ejercicio 14:

Para los mismos vectores del ejercicio anterior, ¿qué valor de k hace que los vectores sean perpendiculares?

Respuesta:

Si u⊥v ==> u.v=0

u.v=2.3+8k+(-10)(-15)=0 ==> k=-39/2

Para que sean perpendiculares debe cumplirse k=-39/2.