Práctico 8: Rectas y Planos

Ejercicio 1

Encuentre el vector director de la recta que pasa por los puntos $P_1 = (2,1,1)$ y $P_2 = (3,5,4)$:

Respuesta

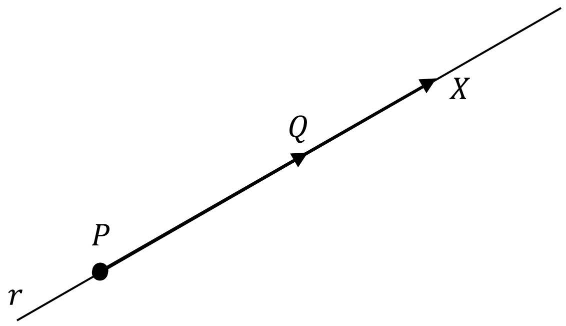
$v = P_1 - P_2 = (2,1,1) - (3,5,4) = (-1,-4,-3)$ vector director de la recta.

Ejercicio 2

Obtenga en $\mathbb{R}^3$ todas las ecuaciones de una recta definida por dos puntos.

Respuesta

Sean $P = (p_1, p_2, p_3)$; $Q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ puntos no coincidentes.



$X = (x, y, z)$ pertenece a la recta definida por los puntos P y Q si y solo si los vectores $X - P$ y $Q - P$ son paralelos:

$X \in r \Leftrightarrow X - P = \lambda(Q - P)$ (1)

En esta ecuación $\lambda \epsilon \mathbb{R}$, se llama parámetro. Para cada valor del parámetro λ se obtiene un punto de la recta r.

$$v = Q - P = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{es el vector director de la recta } r.$$

Escribimos P en el segundo miembro de la ecuación (1):

$X = P + \lambda(Q - P)$ ecuación paramétrica vectorial de la recta.

Con cada una de las coordenadas escribimos una ecuación:

$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases}$ ecuaciones paramétricas escalares de la recta en $\mathbb{R}^3$

Si $v_1 v_2 v_3 \neq 0$ (v no tiene ninguna componente nula) despejamos λ de cada una de las ecuaciones escalares y luego igualamos:

$\lambda = \frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$ ecuaciones cartesianas (forma simétrica). De las tres ecuaciones, dos de ellas son suficientes para definir una recta.

Tomando dos igualdades cualesquiera de las tres que se tienen:

$$\begin{cases} v_2(x - p_1) = v_1(y - p_2) \\ v_3(y - p_2) = v_2(z - p_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 x - v_1 y - v_2 p_1 + v_1 p_2 = 0 \\ v_3 y - v_2 z - v_3 p_2 + v_2 p_3 = 0 \end{cases}$$

Práctico 8: Rectas y Planos

En estas ecuaciones se tiene un coeficiente multiplicando a cada coordenada y un término independiente, por lo que se puede escribir:

$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a`x + b`y + c`z = d` \end{cases}$ ecuaciones cartesianas de la recta en $\mathbb{R}^3$ (son dos ecuaciones).

Ejercicio 3

Para los siguientes pares de planos de $\mathbb{R}^3$, determine si son paralelos (coincidentes o no) o se intersectan. En este último caso escriba la ecuación paramétrica vectorial de la recta intersección.

a) $\pi_1: X = (-2,7,1) + s(3,5,-2) + t(-1,1,0)$

$\pi_2: X = (0,0,1) + \alpha(2,1,2) + \beta(4,4,-2)$

Respuesta

Ecuación cartesiana de π_1:

Llamemos u y v a los vectores directores de π_1. $u\ x\ v: \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ . & . & . \end{bmatrix}; u \times v = (2,2,8)$

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ es un vector perpendicular al plano π_1, sus componentes son los coeficientes de la ecuación cartesiana de π_1. Se puede tomar, para mayor simplicidad, un vector paralelo, el vector $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{4})$.

$\pi_1: \ x + y + 4z = d$

Para obtener el término independiente d, utilizamos un punto cualquiera P del plano.

Las coordenadas de P deben verificar la ecuación del plano.

El punto P lo obtenemos de la ecuación paramétrica de π_1, $P = (-2,7,1)$.

$(-2) + (7) + 4(1) = 9$

$\pi_1: \ x + y + 4z = 9$

$\pi_1 \cap \pi_2$: reemplazamos en la ecuación cartesiana de π_1 las coordenadas x, y, z de la ecuación paramétrica de π_2:

$x + y + 4z = 9$

$(2\alpha+4\beta)+(\alpha+4\beta)+4(1+2\alpha-2\beta)=9$

$11\alpha+0\beta=5$

El sistema resolvente que corresponde a esta última ecuación es:

$1\,\alpha+ 0\beta=5/11$

La solución es $(\alpha,\beta)=(5/11,0) + \lambda(0,1)$ reemplazamos la incógnita no principal β por el parámetro λ.

Reemplazamos la solución en la ecuación paramétrica de π_2:

$X = (0,0,1) + (5/11)(2,1,2) + \lambda(4,4,-2) =$

$X = \left(\frac{10}{11}, \frac{5}{11}, \frac{21}{11}\right) + \lambda(4,4,-2)$

Como la intersección es la ecuación de una recta, los planos se cortan.

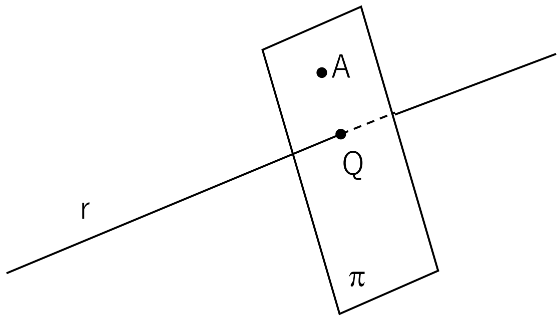
Práctico 8: Rectas y Planos

Ejercicio 4

Sea la recta r: $(x, y, z) = k(1, -1, 1)$ y el punto $A = (0,1,1)$.

Se pide: a) El punto de la recta más próximo al punto A.

b) La distancia entre el punto A y la recta r.



Respuesta

a) Punto de la recta *r* más próximo a *A*:

1) Trazamos un plano π por el punto *A* perpendicular a la recta *r*.

Las componentes del vector director de la recta *r* (es decir el vector *v=(1,-1,1)*)

son los coeficientes de la ecuación cartesiana del plano π.

π: $x - y + z = d$

Para hallar el término independiente *d*, reemplazamos en la ecuación del plano las coordenadas de un punto del plano (el punto *A*).

$(0)-(1)+(1)=0 \Rightarrow d=0$

$\pi: x - y + z = 0$

2) Ahora buscamos la intersección de la recta con el plano.

Para esto reemplazamos las coordenadas de la ecuación paramétrica de la recta en la ecuación cartesiana del plano.

$r \cap \pi$: $(k) - (-k) + (k) = 0$

Resolvemos la ecuación:

$k = 0.$

Para hallar el punto *Q*, punto de *r* más cercano al punto *A*, reemplazamos el valor de *k* hallado en la ecuación paramétrica de la recta *r*:

$Q=0(1,-1,1)= (0,0,0)$ este es el punto de *r* más cercano a *A*.

b) Distancia entre *A* y *r*:

$$d(A, Q) = \|Q - A\| = \|(0,0,0) - (0,1,1)\| = \|(0, -1, -1)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Ejercicio 5

Considere el plano en $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $\pi:\ (x,y,z) = (-6,1,0,) + s(-1,1,3) + t(2,0,-5)$. Para la recta $l_1: (x,y,z) = (5,-2,0) + t(1,2,-1)$; determine si es paralela al plano (contenida o no) o si se interseca al plano en un punto, en cuyo caso debe indicar el punto.

Respuesta

π: $X = (-6,1,0,) + s(-1,1,3) + t(2,0,-5)$

$l1$: $X = (5,-2,0) + t(1,2,-1)$

Para determinar si el plano y la recta son paralelos (la recta está contenida en el plano o es paralela y no está contenida en el plano) o si se intersectan, buscamos la intersección entre ambos.

Si la intersección fuera un solo punto, entonces la recta y el plano se intersectan en un punto.

Si la intersección fuera un conjunto de infinitos puntos, entonces la recta está contenida en el plano.

Si la intersección fuera el conjunto vacío, entonces la recta es paralela al plano y no está contenida en él.

Para resolver más sencillamente el problema, a partir de la ecuación paramétrica vectorial del plano obtendremos la ecuación cartesiana.

Ecuación cartesiana de π:

Vectores directores de π: $u = (-1,1,3)$ y $v = (2,0,-5)$

$uxv = (-5,1,-2)$ vector perpendicular a π.

Los componentes de uxv son los coeficientes de la ecuación cartesiana de π.

$-5x + y - 2z = d$

Para determinar el término independiente d, reemplazamos en la ecuación cartesiana de π las coordenadas de un punto del plano. Para esto utilizamos el punto $(-6,1,0)$ que se obtiene de la misma ecuación paramétrica vectorial del plano.

$-5(-6) + (1) - 2(0) = 31 \Rightarrow d = 31$

π: $-5x + y - 2z = 31$

Ahora buscaremos la intersección de la recta con el plano.

Reemplazaremos las coordenadas de la ecuación paramétrica de la recta en la ecuación cartesiana del plano.

$X = (5,-2,0) + t(1,2,-1)$

$-5\,(5+t) + (-2+2t) - 2(-t) = 31$

$t = 58/21$

$Q = (5,-2,0) + (58/21)\,(1,2,-1)$

Resolviendo esta última expresión se obtienen las coordenadas del único punto intersección. Esto significa que la recta y el plano se intersecan en un punto.

Ejercicio 6

Práctico 8: Rectas y Planos

Escriba la ecuación cartesiana de una recta que pasa por el punto $(1,2,-1)$ y es perpendicular al plano π: $2x + y - 2z = 3$.

Respuesta

Ecuación paramétrica vectorial de una recta:

$X = P + tu$

Para escribir esta ecuación se requiere un punto cualquiera P de la recta y un vector director u.

P puede ser el punto por el que debe pasar la recta, el punto $(1,2,-1)$, pues este punto debe pertenecer a la recta.

$P = (1,2,-1)$

El vector director u es un vector perpendicular al plano π, pues u tiene la misma dirección de la recta.

Las componentes de u se pueden obtener de la ecuación cartesiana de π, ya que los coeficientes de esta ecuación son las componentes de un vector perpendicular al plano. Entonces

$u = (2,1,-2)$

La ecuación de la recta finalmente es

$X = (1,2,-1) \ + \ t(2,1,-2)$

Ejercicio 7

Halle la ecuación del plano paralelo a π: $5x \ - \ y \ + \ 4 \ = \ 0$ que pasa por el punto $P = (1,0,-3)$.

Respuesta

Todos los planos paralelos tienen los respectivos coeficientes de x, y, z de sus ecuaciones cartesianas proporcionales entre sí. En particular, esos coeficientes pueden ser iguales.

Entonces un plano paralelo a π es:

$5x \ - \ y \ = \ d$

Para hallar d reemplazamos las coordenadas de P en la ecuación:

$5\,(1) \ - \ (0) \ = \ d \ = \ 5,$ es decir que $d \ = \ 5$, por lo que la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P es

$5x \ - \ y \ = \ 5$

Ejercicio 8

Sean la recta r: $\begin{cases} y + 3z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ y el plano π: $X = (1,0,2) + t(-1,3,2) + k(0,2,1)$.

Halle la intersección entre ambos, $r \cap \pi$.

Respuesta

Introducimos las coordenadas de la ecuación paramétrica en las ecuaciones cartesianas.

$$\begin{cases} (3t + 2k) + 3(2 + 2t + k) = 0 \\ \quad 2(1 - t) - (3t + 2k) = 1 \end{cases}$$

Haciendo las operaciones el sistema queda así:

$$\begin{cases} 9t + 5k = -6 \\ -5t - 2k = -1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $S = (t, k) = (\frac{17}{7}, -\frac{39}{7})$

Reemplazamos los valores de t y k en la ecuación paramétrica del plano y se obtiene:

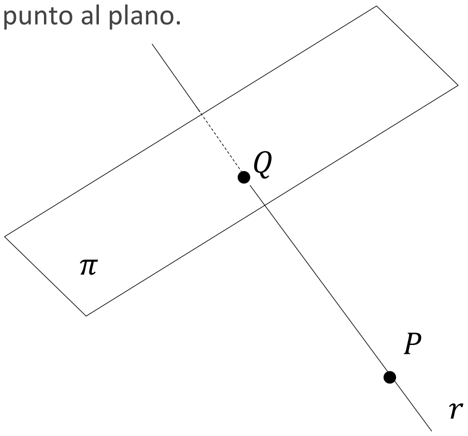
$Q = \left(-\frac{10}{7}, \frac{51}{7}, \frac{9}{7}\right)$ Punto intersección entre la recta y el plano.

Ejercicio 9

Sea el plano π: 2x+y-2z=3 y el punto $P = (-1,2,3)$.

Halle la distancia del punto al plano.

Respuesta



1) Recta r, perpendicular al plano y contiene al punto P.

   $r: X = P + k(2,1,-2) = (-1,2,3) + k(2,1,-2)$

2) Intersección de la recta y del plano.

   $2(-1 + 2k) + (2 + k) - 2(3 - 2k) = 3$

   Resolvemos: $k = 1$

   Reemplazamos k en la ecuación de la recta:

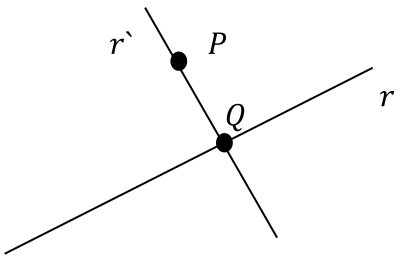
   $Q = (-1,2,3) + 1(2,1,-2) = (1,3,1)$ este es el punto del plano más cercano al punto P.

3) Distancia entre el plano y P:

   $d(P, Q) = \|Q - P\| = \|(2,1,-2)\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$

Ejercicio 10

Sea en $\mathbb{R}^2$ la recta $r: 2x - y = 1$ y el punto $P = (1, -2)$. Halle la distancia de P a r.



Práctico 8: Rectas y Planos

1) Recta $r`$ perpendicular a r, que contiene a P:

   El vector $v = (2, -1)$ es perpendicular a r, por tanto, es un vector director de $r`$.

   $r`: X = P + tv = (1, -2) + t(2, -1)$

2) Intersección de r y $r`$:

   $2(1 + 2t) - (-2 - t) = 1$

   $t = -\frac{3}{5}$

Reemplazamos este valor en la ecuación de $r`$:

   $Q = (1, -2) - \frac{3}{5}(2, -1) = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

3) $d(P, Q) = \|Q - P\| = \left\|\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$