Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Departamento de Matemática

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

DE

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA

Año: 2012
(Edición original 2006)

Prof. MSc. Ing. Jorge AZPILICUETA

Prof. Esp. Ing. Laura VARGAS

Unidad 1: *Números Reales*

Ejercicio Nº 1: Determinar cual proposición es verdadera y cuál es falsa, resolviendo gráfica o analíticamente, según el caso.

a) $4<7$

b) $-10>-3$

c) $\frac{3}{2}<\frac{9}{7}$

d) $\frac{7}{4}\leq\frac{9}{5}$

e) $3x > x \quad \forall x \in R^-$

f) $-2x \leq x \quad \forall x \in R \wedge x \geq 0$

Ejercicio Nº 2: Representar gráficamente sobre la recta real los siguientes subconjuntos de números reales:

a) $A = \{x \in R / \quad x < -3 \quad \wedge x > 1\}$

b) $A = \{x \in R / \quad x \leq -1 \quad \vee x > 4\}$

c) $A = \{x \in R / \quad x < 2 \vee \quad x > -1\}$

d) $A = \{x \in R / \quad x < 2 \vee \quad x > -1\}$

e) $A = \{x \in R / \quad x \geq -2 \vee \quad x \leq -1\}$

f) $A = \{x \in R / \quad -6 < x \leq -2\}$

Ejercicio Nº 3: ¿Para qué valores de $x \in R$ se verifican las desigualdades siguientes?. Represente gráficamente las soluciones sobre la recta real:

a) $3 - 2x < 4x - 5$

b) $2 + 5x > 8 + x$

c) $7x - 1 \leq 2x + 1$

d) $x - 6 < 2x - 5 \leq 2x - 8$

e) $5x - 2 \leq 10x + 8 < 2x - 8$

f) $\frac{5+x}{5-x} \leq 2$

g) $\frac{3x+1}{x} > \frac{1}{x}$

h) $\frac{2x-1}{x} < 2$

i) $\dfrac{3x+8}{x-1} \geq -2$

j) $-2 < \dfrac{6-2x}{3-x} \leq 2$

Ejercicio Nº 4: Representar gráficamente sobre la recta real los siguientes conjuntos de números reales:

a) A = $[0,\ 10]$

b) A = $(-1,\ 5]$

c) A = $[-3,\ 10)$

d) A = $(-1,\ 4)$

e) A = $(-\infty,\ 6] \cap (-4,\ +\infty)$

f) A = $[0,\ 10) \cap (3,\ 15)$

g) A = $(-\infty,\ -4] \cup (-2,\ +\infty)$

Ejercicio Nº 5: Representar gráficamente sobre el eje real los siguientes conjuntos de números reales:

a) A = $\{x / |x| < 6\} = -6 < x < 6$

b) A = $\{x / |x| \leq 3\}$

c) A = $\{x / |x| > 2\}$

d) A = $\{x / |x| \geq 4\}$

e) A = $\{x / |x-1| \geq 4\}$

f) A = $\{x / |x-3| \leq 2\}$

g) A = $\{x / |x-3| > 0\}$

h) A = $\{x / |x+2| \geq 4\}$

Ejercicio Nº 6: Escribir, si es posible, como entornos $V_\delta(c)$, o como entornos reducidos $V'_\delta(c)$ los siguientes conjuntos de números reales. Grafique sobre la recta real.

a) A = $\{x / |x-3| < 2\}$

b) A = $\{x / |x-1| > 4\}$

c) A = $\{x / 0 < |x-4| < 3\}$

d) A = $\{x / (-3 < x < 1) \wedge x \neq -1\}$

e) A = $\{x / (-3 \leq x \leq 1) \wedge x \neq -1\}$

f) A = $(2,6) - \{4\}$

g) A = $\{x / |x+1| \leq 3\}$

h) A = $\{x / |x-2| > 0\}$

i) A = $\{x / |x-5| < 2 \vee x = 9\}$

j) A = $(3,8) - \{5\}$

Ejercicio Nº 7: determinar todos los valores de ``x´´ que satisfacen las siguientes relaciones:

a) $|x-1| = |2x-2|$ b) $|x-1| = |x-2|$

c) $|x-1| = |2x-1|$ d) $|x| > |x-2|$

Ejercicio Nº 8: Demostrar las siguientes propiedades del valor absoluto:

$$1)\ |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \quad con \quad a \ge 0,\ \ a \in R$$

$$2)\ |x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a \quad o \quad x \le -a \quad con \quad a \ge 0,\ \ a \in R$$

Ejercicio Nº 9: Pruebe que: $|a-b| < r \quad si \quad y \quad solo \quad si \quad b-r < a < b+r, \quad donde \quad r > 0$.

Unidad 2: *Sistemas de Ecuaciones Lineales - Introducción*

1. Escriba *una* ecuación lineal genérica con 4 incógnitas utilizando símbolos x_i para las mismas, a_i para los coeficientes y b para el término independiente.

2. Siguiendo las indicaciones del punto anterior escriba un sistema genérico de 3 ecuaciones lineales con 4 incógnitas. (En este caso a_{ij} describirá los coeficientes y b_i los términos independientes)

3. a)Siguiendo las mismas instrucciones de los puntos anteriores escriba un sistema de *ecuaciones lineales homogéneo* genérico de k ecuaciones con p incógnitas.
b) Siguiendo las mismas instrucciones de los puntos anteriores escriba un sistema de *ecuaciones lineales no homogéneo* genérico de k ecuaciones con p incógnitas.

Matrices: Operaciones Elementales de Filas

4. Dadas las siguientes matrices A, determinar las matrices B que resulten de aplicar las operaciones elementales de filas indicadas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad e_1(-3) \qquad\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad e_{21}(-3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & -1 & 4 \end{bmatrix}$$ $e_{21}(-3/2)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ $e_{31}(1)$, $e_2(3)$, $e_{21}(-1)$, $e_{32}(-3)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ e_{12} , $e_1(3)$, e_{21} (-1), $e_2(1/2)$

5. Indique cuál de las siguientes matrices es reducida por filas. Si no lo fueran especifique qué condiciones (o condición) no se cumple.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Indique el rango de las matrices del ejercicio anterior. Recuerde que la definición considera el número de filas no nulas ***de la matriz reducida***, de modo que en caso de no ser reducida la matriz debe realizar las operaciones necesarias para convertirla en tal.

7. Encuentre la reducida por filas de las siguientes matrices, indicando las operaciones elementales realizadas.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 3 & \frac{2}{3}\\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 9\end{bmatrix}\qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 6 & 3 & -3\\ 3 & 5 & -3 & -2\end{bmatrix}$$

8. Escriba una matriz **D** cuyas filas sean combinación lineal de las filas de la matriz **A** del ejercicio **7**, según los escalares {1, 3, -1}, {0, 1, -1}, {0, 1, 1}

9. Escriba una matriz **E** cuyas columnas sean combinación lineal de las columnas de la matriz **B** del ejercicio **7**, según los escalares {1,-1,2,1}, {2,0,1,0}, {0,0,1,0}, {0,0,0,-1}

Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

10. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneas. Cuando la solución no sea única (solución trivial) indique la solución general y dos soluciones particulares.

$$a)\ \begin{matrix}x_1+x_2=0\\ x_1-x_2=0\end{matrix}\qquad b)\ \begin{matrix}x_1+2x_2=0\\ x_1+2x_3=0\end{matrix}\qquad c)\ \begin{matrix}2x_1-x_3=0\\ x_2+3x_3=0\end{matrix}$$

$$d)\ \begin{matrix}x_1+x_4=0\\ x_2-x_4=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{matrix}\qquad e)\ \begin{matrix}-2x_1+2x_2=0\\ 3x_1-2x_2=0\\ x_1+4x_2=0\end{matrix}\qquad f)\ \begin{matrix}2x_1-x_3=0\\ -2x_2+3x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\end{matrix}$$

$$g)\ \begin{matrix}x_1+x_3=0\\ x_1-x_2=0\\ x_3=0\end{matrix}\qquad h)\ \begin{matrix}x_1+3x_3+x_4=0\\ x_1-x_2+2x_3=0\\ x_1-x_3+x_4=0\end{matrix}\qquad i)\ \begin{matrix}2x_1-x_4=0\\ -x_2+x_4=0\\ -x_1+x_3=0\end{matrix}$$

11. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones no homogéneas. Cuando la solución no sea única indique la solución general y dos soluciones particulares.

$$a)\ \begin{matrix}x_1+x_2=3\\ x_1-x_2=1\end{matrix}\qquad b)\ \begin{matrix}x_1+x_2=-1\\ x_1+2x_3=3\end{matrix}\qquad c)\ \begin{matrix}2x_1-x_3=0\\ 2x_2-3x_3=1\end{matrix}$$

$$d)\ \begin{cases} x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} 2x_1 - x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases} \qquad i)\ \begin{cases} 2x_1 - x_4 = 1 \\ -x_2 + x_4 = -2 \\ -x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$$

12. a)Obtenga para el sistema *a)* del ejercicio anterior una nueva ecuación que sea combinación lineal de las dadas según los escalares –1 y 2.

b)Lo mismo para el sistema *g)* según los escalares 2, 1 y -3.

13. Para la matriz **A** del ejercicio 7 construya un sistema de ecuaciones suponiendo:

a) Que la matriz **A** es la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo.
b) Que la matriz **A** es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo.
c) Encuentre la solución en ambos casos.

14. Encuentre el valor de b para que el siguiente sistema tenga solución:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= b \end{aligned}$$

15. Encuentre la(las) condición(condiciones) que deben cumplir y_1, y_2, y_3 para que los siguientes sistemas tengan solución:

a) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= y_1 \\ x_2 + x_3 &= y_2 \\ -x_1 - 2x_2 &= y_3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= y_1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= y_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 &= y_3 \end{aligned}$$

16. Determine para qué valor/es de a el sistema tiene soluciones distintas de la solución trivial.

a) $$\begin{aligned} ax_1 - 2x_2 &= 0 \\ ax_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ ax_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

17. Encontrar los valores de a y de b para que los siguientes sistemas sobre $\mathbf{P}$ tengan:

I- Solución única

II-Infinitas soluciones

a) $\begin{aligned} x_1 - ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= b \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} ax_1 + 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + bx_3 &= 3 \end{aligned}$

18. Resuelva, si es posible, el sistema:

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

19. Sea **AX=0** un sistema homogéneo y **AX=B** un sistema no homogéneo, ambos con *m* ecuaciones con *n* incógnitas. **A'** es la matriz aumentada del sistema **AX=B**.

a) Indique cuáles de las siguientes proposiciones se verifican siempre, cuáles pueden no cumplirse y cuáles no se cumplen nunca en los casos listados. (Se designa como r al rango de la matriz.)

b) Establezca cuáles proposiciones deben ser verdaderas para que cada sistema tenga una única solución, más de una solución o para que no tenga solución.

	AX=0			AX=B			Sol. única		Infinitas Soluciones		Sin solución	
	Siempre	A veces	Nunca	Siempre	A veces	Nunca	SH	SNH	SH	SNH	SH	SNH
r(A)<r(A')												
r(A)=r(A')												
r(A)>r(A')												
r(A)<n												
r(A)=n												
r(A)>n												
m<n												
m=n												
m>n												

Problemas de Aplicación

20. La suma de las 3 cifras de un número es 9. La cifra de las decenas es una unidad mayor que la suma de las otras dos. Si invertimos el número obtenemos un número 198 unidades menor. Plantee el sistema de ecuaciones.

21. Determine un polinomio de tercer grado tal que P(-1)=-1. P(2)=-7, P(1)=1 y P(3)=-1.

22. Tres grifos llenan una pileta de la siguiente forma: si lo hacen A y B la llenan en 20 minutos, B y C en 10 minutos y A y C en 12 minutos. En cuánto tiempo la llenaría cada grifo?

23. Qué proporción debe tomarse de 3 barras formadas así:

Barra 1: 20 g de oro, 30 g de plata, 40 g de cobre

Barra 2: 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre

Barra 3: 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre

para formar una nueva barra con 34 gramos de oro, 46 de plata y 67 de cobre.

24. Hieron de Siracusa mandó hacer una corona de oro que pesaba 7465 gramos. Para saber si el joyero había sustituido oro por plata, Arquímedes sumergió la corona en agua donde perdió 467 gramos de peso. El oro pierde en el agua 52/1000 del peso y la plata 95/1000. ¿Qué cantidad de oro y plata tenía la corona?

Matrices – Suma y Multiplicación

25. Obtenga **A+B**, **-3B**, **2A+3B**, dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & -2 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

26. Con las matrices del ejercicio anterior determine la matriz **X** tal que: **5A-3B-X=0**.

27. Dada la matriz:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5 & 7\\ 3 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 6 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Construya:

a) Una matriz **B** de dos filas haciendo combinaciones lineales de las filas de **A** con los escalares –1, 1, 2 para la primera fila y –3, 2, 5 para la segunda.

b) Una matriz **C** de 3 columnas haciendo combinación lineal de las columnas de A según los escalares 1, 1, -1, -1 para la primera y –2, 3, 3, 0 para la segunda y 1+i, i, 3, -1 para la tercera.

28. Calcule los productos **AB** y **BA**, si es posible, para:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & -1\\ 2 & 3 & -2 & 0\end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ -7 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}3 & 2+i & 5\\ 1 & 1-i & 7\end{bmatrix}$

c) $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -6\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}3 & 12\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

d) $A=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}5 & -3 & 4 & 1\end{bmatrix}$

29. Verifique el cumplimiento de **(AB)C=A(BC)** dadas las matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix} \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}8\\ -2\end{bmatrix}$$

30. Verifique el cumplimiento de **A(B+C)=AB+AC**, y **(B+C)D=BD+CD**, dadas las matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

31. Verifique que, en este caso, **AB=CB**. Sin embargo **B** no puede simplificarse, ya que **A≠B**. ¿Cómo expresa esta propiedad?

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

32. Calcule **AB**. Observe que el producto de dos matrices no nulas puede ser la matriz nula:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-4 & -6\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

33. Sean las matrices:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{bmatrix}$$

donde

$\mathbf{C_1} = 2\mathbf{B_1}+\mathbf{B_2}$
$\mathbf{C_2} = \mathbf{B_1} - 3\mathbf{B_2}$
$\mathbf{C_3} = 5\mathbf{B_1}$

Indique la matriz **A** que verifica que **AB=C**

34. Sean las matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A^1 & A^2 & A^3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}C^1 & C^2\end{bmatrix}$$

tal que

$C^1 = A^1 + A^2 + A^3$
$C^2 = A^1 - 2A^3$

Indique la matriz **B** tal que **AB=C**

35. Exprese como producto de matrices:

a) $3\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}-1\\ -4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}$

b) $4\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\end{bmatrix}$

36. Demuestre que **(A+B)(A-B)=(A²-B²)** si y sólo si **AB=BA**

37. Verifique que la ecuación $\mathbf{X}^2$-5**X**+4I=0 es satisfecha para las siguientes matrices **X**:

a) I　　　b) 4I　　　c) $\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

38. Sea

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Verifique que $\mathbf{A}^3=5\mathbf{I}$. Calcule $\mathbf{A}^{28}$

39. Demuestre que **AB** conmuta, si y sólo si **A** y **B** verifican que **A**-c**I** y **B**-c**I** conmutan para todo valor del escalar c.

Matrices Elementales

40. Determine las matrices elementales 3x3 que resultan de aplicar a la matriz identidad correspondiente las siguientes operaciones elementales de fila

a) $F_1 \leftrightarrow F_2$ b) $3F_2$ c) F_1+2F_3

41. Sea **A** la matriz:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

Verifique que aplicar las operaciones elementales indicadas en el ejercicio anterior es lo mismo que calcular EA

o sea que e(**A**)=**EA**

42. Determine la matriz elemental **E** tal que **EA= B**. **A** es la indicada en el ejercicio 13 y

a) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ c) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

Inversibilidad

43. En cada caso dè una matriz **P**, tal que **PA=R** siendo **R** la matriz escalón reducida por filas equivalente por filas a **A**. Exprese **P** como producto de matrices elementales.

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

44. Verifique en cada caso del ejercicio anterior si la matriz **A** es inversible, calculando la inversa cuando sea posible.

45. Calcule la inversa de las siguientes matrices, cuando sea posible:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

46. Determine una matriz **B**, tal que **AB=C** (Observe que **A** es inversible)

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

47. Calcule $(\mathbf{ABC})^{-1}$ dadas las matrices:

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

48. Calcule las matrices **A**, **B** y **A+B**, sabiendo que:

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

49. Dadas dos matrices **A** y **B**, tales que:

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ y $(\mathbf{A}+3\mathbf{B})=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$

Calcule **A** y **B**

50. Sean las matrices $A \in R^{2x1}$ y $B \in R^{1x2}$ demostrar que **AB** no es inversible. Tome

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}$

51. Dadas las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

Calcular en cada caso, si es posible, una matriz **C** tal que:

$\mathbf{a)}\left(\mathbf{A}+\mathbf{C}\right)\mathbf{B}=\mathbf{C}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)$

$\mathbf{b)}3\mathbf{I}+2\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{B}$

$\mathbf{c)}\mathbf{AC}+2\mathbf{B}=\mathbf{C}+3\mathbf{ABC}$

$\mathbf{d)}\mathbf{AC}-\mathbf{I}=\mathbf{AB}$

Determinantes

52. Calcule los determinantes de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix} \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 8 & 0 & 3\\ 1 & -5 & 7 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

53. Encuentre los valores de λ tales que det(**A**)=0

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda-6 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 4 & \lambda-4\end{bmatrix}$

54. Determine el valor (o los valores) de *k* para que **A** ***no sea inversible***

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 6\\ k & 3 & 2\end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}k & -2\\ -2 & k\end{bmatrix}$

55. Sea $\mathbf{A}\in R^{3x3}$ con det(**A**)=5. Calcule:

a) det(3**A**) b)det(**A**$^{-1}$) c) det(2**A**$^{-1}$) d)det(2**A**)$^{-1}$

<u>Unidad 3</u>: *Vectores*

56. Dibuje los segmentos dirigidos definidos por los siguientes pares de puntos del plano:

a)	P=(1,2)	Q=(3,4)	d)	P=(1,-2)	Q=(1,-4)
b)	P=(-1,3)	Q=(-2,1)	e)	P=(3,0)	Q=(2,-2)
c)	P=(-2,-3)	Q=(0,-1)	f)	P=(6,2)	Q=(6,0)

En cada caso:

I-Encuentre los números de dirección

II-Determine cuáles de estos segmentos dirigidos representan el mismo vector libre.

III- Para cada vector libre dibuje el representante con origen en P=(4,-1)

57. Para los siguientes vectores libres en el plano, dibuje los representantes con origen en el punto P=(-1,3)

a. (2,1)	d) (0,4)	g) (-2,-3)
b. (0,-3)	e) (-5,15/2)	h) (-5,0)
c. (3,-4)	f) (-3,3)	i) (4,6)

En cada caso:

I-Encuentre las coordenadas del extremo Q.

II-Señale los vectores paralelos (de igual sentido y de sentido opuesto)

58. Represente gráficamente los vectores de coordenadas:

a) $\sqrt{5} \in R$ b)(2,-5) $\in R^2$ c) $(1,-2,2) \in R^3$

d) $(-3,-8) \in R^2$ e) $(2,-5,3) \in R^3$

59. Dado en el espacio el vector **v**=(1,2,-1), encuentre el extremo Q de su representante con origen en P=(1,-1,1) y el origen P del representante de **v** con extremo Q=(3,2,2)

60. Construya diagramas para demostrar que:

a. 2(**u**+**v**)= 2**u**+2**v**

b. (-1)(**u**+**v**)=(-1)**u**+(-1)**v**

c. (α+β)**u**=α**u+**β**u**

61. Sean los vectores libres del plano

u=(2,3) **v=**(0,-3) **w=**(2,-4)

a)Obtenga los vectores:

x=u+v-w

y=u+2/3**v**-1/2**w**

b)Obtenga los mismos vectores gráficamente

62. Calcule el vector **u** sabiendo que:

a) 5(1,-3)-7**u**=(14,-2)+3**u**

b)4**u**+2(-2,1,3)=-5(3,0,-2)-4**u**

63. Dados A=(3,-1,2), B=(7,5,-4) y C=(-2,9,11) determine:

a)Las componentes de $\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{BO}$ $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{CA}$

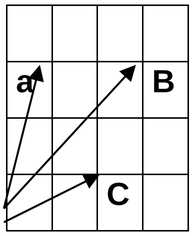
b)Las coordenadas de los puntos P, Q y R tales que:

$\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OQ} \sim \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OR} \sim \overrightarrow{CA}$

64. Encuentre los escalares *m* y *n* tales que:

a) m**a+**n**b**=**c;**

b) m**a**+n**b**=**0**



65. Encuentre vectores **u=**(u_1, u_2) y **v=**(v_1,v_2) tales que:

u+v=(1,0) **u-v=**(0,1)

66. Sobre un punto del espacio actúan fuerzas representadas por los vectores:

$\mathbf{F_1}$=(1,2,1) $\mathbf{F_2}$=(-3,2,-1) $\mathbf{F_3}$=(-5,-1,10) $\mathbf{F_4}$=(6,1,6)

Verifique si dichas fuerzas están en equilibrio. En caso de no estarlo encuentre una fuerza $\mathbf{F_5}$ que restablezca el equilibrio.

67. Sean **u**, **v** y **w** vectores libres del espacio tales que:

u+v+w=(1,0,0)

u-v+w=(0,1,0)

3**u-v-**2**w**=(0,0,1)

Encuentre las componentes de dichos vectores **u**, **v** y **w**

68. Resuelva la ecuación vectorial –3**u+**2**x=**5**v**+3**x** siendo:

u=(1,-3,5) **v=**(0,-2,-1) **x=**(x_1,x_2,x_3)

69. Sean los vectores

u= (2,0,1) **v=**(3,2,0) **w=**(1,0,3)

a)Encuentre el vector combinación lineal de **u, v** y **w** según los escalares 2, -1 y 3.

b)Determine si el vector (-3,-4,-1) es combinación lineal de **u, v** y **w** indicando si es así según qué escalares.

70. Calcule la norma de los vectores:

a) **v**=(12,-5) b) **w**=(6,8) c) **u**=(1,-3,5)

71. Halle el ángulo entre los pares de vectores:

a) **v**=(12,5) **w**=(6,8)

b) **v**=(1,-3,5) **w**=(2,0,1)

c) **v**=(8,6) **w**=(5,12)

d)**u**=(-1,3) **w**=(3,-9)

e)**u**=(0,-2) **w**=(1,7/2)

72. Encuentre los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son (-1,0) (-2,1) y (1,4).

73. Dado el triángulo que tiene por vértices los puntos A=(2,-1,4), B=(-1,3,5) y C=(4,5,1) calcule sus ángulos. Verifique mediante la suma de los mismos.

74. Descomponga el vector **v**=(7,5,4) en un vector paralelo y otro perpendicular al vector **u=**(1,-2,3)

75. En cada uno de los casos siguientes se pide:

u.v $\angle$**(u,v)** $\mathbf{proy_v u = u_1 = \frac{u.v}{v.v} v}$ $\mathbf{u_2 = u - u_1}$

I) **u=**$(1,\sqrt{3})$ $\mathbf{v}=(\sqrt{3},1)$

II) **u=**(1,0,1) **v**=(-1,1,-2)

III) **u=**(1,-3,7) **v=**(8,-2,2)

76. Dados los vectores **u**=(4,-2) **v=**(-3,2) **w**=(2,-1,1/2)

a)Calcule la longitud de cada vector

b)Grafique los vectores

c)Encuentre **u+v** y $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$

77. Para los vectores del ejercicio anterior halle:

a)–2**u** b)$\|-2\mathbf{u}\|$ c)1/2**w** d)1/2**u**-2**v** e)$\left\|\frac{1}{2}\mathbf{u}-2\mathbf{v}\right\|$

78. Encuentre el escalar *k* tal que **u** y **v** sean perpendiculares:

a) **u**=(8,6) **v**=(3,k) b)**u=**(k,3) **v**=(-2,1)

79. Dados los *vectores* **u**=(-3,4), **v**=(2,-3) y **w**=(-5,0) halle:

a)2**u**-4**v** b)**u.v** c)**u.(v+w)** d)$\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$

e)(-2**u**+3**v**).5**w** f)$\|\mathbf{u}\|$**v.w**

80. Determine el valor k tal que $\|k\mathbf{v}\|=3$ siendo **v**=(2,2,-2)

81. Sean A,B,C puntos del plano. Encuentre la medida del ángulo $A\hat{B}C$¨

a)A=(4,3) B=(1,-1) C=(6,-4)

b)A=(2,-1) B=(-2,3) C=(0,-8)

82. Encuentre un vector que tenga la misma dirección que **u=**(3,-4) y tres veces su longitud.

83. Encuentre el vector opuesto a **v**=(5,12) que además sea de longitud unitaria.

84. Se tienen dos cargas eléctricas positivas. Entre éstas se ejercen fuerzas de repulsión. Se sabe que una está ubicada en $P_1=(2,1,1)$ y otra en $P_2=(3,5,4)$. Calcular un vector unitario que tenga la dirección de dichas fuerzas.

85. Dados los vectores **u**=(1,1,-1) y **v**=(2,1,1) halle:

a) $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ b) **u.v**   c) $\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$

86. En cada uno de los casos siguientes dados los vectores **u** y **v** indique:

I. Si son paralelos. (Justifique la respuesta)

II. Si son perpendiculares. (Justifique la respuesta.)

a) **u**=(1,2,-1)   **v=**(-2,-4,2)

b) **u**=(1,3,0)   **v=**(-3,1,2)

c) **u**=(1,3,-2)   **v=**(1,1,3)

87. Halle el valor de k para que los vectores (2,k,-10) y (3,8,-15) sean

1. Paralelos
2. Perpendiculares

88. Determine el/los valor/es de k de manera que los siguientes vectores sean ortogonales:

(4,5-k,4)   y   (3,k,-4)

89. Sean **u=**(2,-5,8),   **v**=(1,-1,7) y **w=**(3,-2,9). Calcule:

a) **uxv**   b) **(uxv).w**

90. Determine un vector perpendicular a los vectores **u**=(2,-1,3) y **v**=(0,1,7).

91. Sea **u**=(-1,3,2) y **v**=(1,1,-1). Determine todos los vectores **x** que satisfacen **u**x**x=v**.

92. Calcule el área del triángulo de vértices A, B y C en los siguientes casos:

a)	A=(3,8)	B=(-1,5)	C=(3,-2)
b)	A=(1,5,-2)	B=(0,-2,7)	C=(3,-1,4)
c)	A=(1,5,-2)	B=1,4,5)	C=(3,5,1)

93. Calcule el volumen del tetraedro con vértices en A=(1,5,-2) B=(0,-2,7) C=(3,-1,4) D=(-7,3,-5).

94. Calcule el volumen del prisma triangular determinado por los vectores:

u=(2,5,-1) **v=**(1,3,5) **w**=(5,2,3)

Recta y plano

95. Sea *L* la recta que pasa por el punto (-2,5) y tiene vector director (3,-7)

a) Escriba una ecuación paramétrica vectorial de la recta.

b) Determine sus ecuaciones paramétricas escalares.

c) Determine una ecuación cartesiana.

d) Dé la forma segmentaria de la ecuación.

e) Grafique la recta destacando los puntos correspondientes a los valores del parámetro t=0, t=1, t=3/4, t=-2.

f) Verifique si los puntos (4,-9), 2,5), (3,8) y (-5,2) pertenecen a no a la recta.

96. Sea L la recta que pasa por los puntos A=(2,-3) y B=(5,7). Repita los ítems a) b) y c) del ejercicio anterior para esta recta. Además:

d) Grafique L destacando 5 puntos en particular.

e) Verifique si los puntos (1,4/7), (3,8), (-2,11) y (-1,-13) pertenecen a L

97. Determine las ecuaciones paramétricas escalares y cartesiana para la recta que pasa por (1,7) y es paralela a la recta del ejercicio anterior.

98. La ecuación de una recta L es 5x-7y+11=0. Escriba la ecuación que representa a todas las rectas paralelas a L. Determine en particular la ecuación de la recta paralela a L que pasa por el punto (4,2).

99. Sea L:{(x,y)/2x+3y-7=0}. Calcule una ecuación paramétrica vectorial y las ecuaciones paramétricas escalares.

100. Encuentre los puntos de intersección con los ejes de coordenadas de cada una de las siguientes rectas de P^2:

$$a)\, 5x-3y=15 \qquad b)\, \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{5}$$

$$c)\, (x,y)=(2,-5)+t(1,3) \qquad d)\begin{cases} x=1+2t \\ y=5-3t \end{cases}$$

101. Determine si los siguientes pares de rectas de P^2 son paralelas, si es así indique si son coincidentes.

$$a)(x,y)=(3,-2)+t(1,3/2) \qquad \begin{cases} x=1+2t \\ y=3+3t \end{cases}$$

$$b)\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-2} \qquad (x,y)=(0,3)+t(1,-2/3)$$

$$c)y=3x-5 \qquad y=2x-5$$

$$d)2x+3y=6 \qquad \begin{cases} x=-3+3t \\ y=4-2t \end{cases}$$

$$e)\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{4}=1 \qquad x_2=-2x_1+3$$

102. Encuentre la intersección de las siguientes rectas en P^2:

$$a)2x+3y=4 \qquad x-y=2$$

$$b)(x,4)=(3,-2)+t(1,-1) \qquad \begin{matrix} x=2+t' \\ y=-1+2t' \end{matrix}$$

$$c)2x-5y=3$$
$$(2,4)=(2,2)+t(-1,1)$$

$$d)\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-1} \qquad y=-2x-1$$

103. Sea *L* la recta en P^3 que pasa por el punto (2,1,-5) que tiene vector director (5,0,-3).

a) Escriba una ecuación paramétrica vectorial de la recta.

b) Determine sus ecuaciones paramétricas escalares.

c) Determine una ecuación cartesiana.

104. Sea la recta que pasa por los puntos A=(-1,4,7) y B=(3,1,-4), encuentre todo lo pedido en el ejercicio anterior.

105. Sea la recta de P^3 representada por las ecuaciones:

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{5}=z-1$$

Determine las ecuaciones paramétricas escalares y vectoriales.

106. Demuestre que el conjunto de puntos (x,y,z) de P^3, tales que:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 7y - 4z = 1 \end{cases}$$

es una recta.

107. Determine si los siguientes pares de rectas en P^3 son paralelas, en caso afirmativo, averigüe si son coincidentes:

$$a) L_1 : (x, y, z) = (1,0,3) + t(2,1,-2) \qquad L_2 : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-3}{-2}$$

$$b) L_1 : \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases} \qquad L_2 : (x, y, z) = (0,4,-1) + t(2,-3,1)$$

$$c) L_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 3 \end{cases} \qquad L_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$$

108. Sea π el plano de P^3 que pasa por A=(-8,5,1) con vectores directores **u=**(2,0,3) y **v**= (1,-1,5). Calcule las ecuaciones paramétricas (escalares y vectoriales) y cartesianas de dicho plano.

109. Sea π el plano que pasa por A=(1,-5,6), B**=**(2,-3,7) y C=(1,2,-3). Calcule las ecuaciones paramétricas (escalares y vectoriales) y cartesianas de dicho plano.

110. Halle una ecuación del plano que pasa por el punto (-2,3,-1) y es paralelo a dos rectas que tienen como números directores respectivamente (2,-3,0) y (-1,2,3).

111. Halle la ecuación del plano perpendicular al plano YZ que pasa por los puntos:
P=(2,-1,4) y Q=(1,3,-7)

112. Encuentre los puntos de intersección con los planos coordenados de las siguientes rectas de P^3:

$$a) L : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - t \\ z = -2 \end{cases} \qquad b) L : \begin{cases} 2x + y + 2x = 0 \\ 4x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

113. Para los siguientes pares de rectas en P^3 determine si son paralelas (coincidentes o no), concurrentes o alabeadas:

a) $\begin{cases} L_1 : (x_1, x_2, x_3) = (2,3,-1) + t(5,-1,3) \\ L_2 : (x_1, x_2, x_3) = (-7,2,0) + s(1,0,1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} L_1 : (x_1, x_2, x_3) = (0,2,-3) + t(1,2,-1) \\ L_2 : \dfrac{x_1+5}{3} = \dfrac{x_2-3}{-5} = -z \end{cases}$

c) $\begin{cases} L_1 : (x_1, x_2, x_3) = (-1,3,0) + t(6,-10,2) \\ L_2 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \end{cases}$

d) $\begin{cases} L_1 : x_1 - 5 = \dfrac{x_2+2}{4} = \dfrac{x_3-1}{3} \\ L_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \end{cases}$

114. Para los siguientes pares de planos π_1 y π_2 en P^3, determine si son paralelos (coincidentes o no) o se intersecan. En este último caso dé la ecuación paramétrica vectorial de la recta intersección.

a) $\begin{cases} \pi_1 : (x,y,z) = (-2,7,1) + s(3,5,-2) + t(-1,1,0) \\ \pi_2 : (x,y,z) = (0,0,1) + \alpha(2,1,2) + \beta(4,4,-2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \pi_1 : 10x - 7y - 8z = 39 \\ \pi_2 : (x,y,z) = (0,0,1) + \alpha(2,1,2) + \beta(4,4,-2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \pi_1 : (x,y,z) = (5,0,2) + s(2,-1,2) + t(3,4,1) \\ \pi_2 : (x,y,z) = (-2,3,-2) + \alpha(1,-6,3) + \beta(5,14,-1) \end{cases}$

115. Considere el plano en P^3 dado por π:(x,y,z)=(-6,1,0)+s(-1,1,3)+t(2,0,-5). Para las siguientes rectas determine en cada caso si son paralelas al plano (contenidas o no) o si intersecan al plano en un punto en cuyo caso debe indicar el punto:

a) $L_1 : (x,y,z) = (5,-2,0) + t(1,2,-1)$

b) $L_2 : (x,y,z) = (-4,7,13) + s(-3,5,0)$

c) $L_3 : \begin{cases} -x + 3y + z = 9 \\ x + 7y + 4z = 1 \end{cases}$

116. Se pide lo mismo que en el ejercicio anterior, ahora para el plano π: x+5y-z=1 y las rectas:

a) $L_1 : (x,y,z) = (5,-2,3) + t(-7,2,9)$

b) $L_2 : \dfrac{x-2}{3} = y+1 = \dfrac{z-6}{4}$

c) $L_3 : (x,y,z) = (-3,6,13) + t(7,-5,9)$

d) $L_4 : \begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 3x + y - 4z = 8 \end{cases}$

117. Halle el valor de k para que la recta kx+(k-1)y-18=0 sea paralela a la recta 4x+3y+7=0.

118. a) Encuentre un vector ortogonal a (4,3).

b) Demuestre que el conjunto de vectores de P^2 ortogonales a (4,3) define una recta que pasa por el origen. Dé una ecuación cartesiana de la misma

c) Dé los vectores unitarios ortogonales a (4,3)

119. a) Determine un vector ortogonal a (2,1,2)

b) Demuestre que el conjunto de vectores de P^3 ortogonales a (2,1,2) define un plano que pasa por el origen. Dé una ecuación cartesiana del mismo.

120. Determine el valor de k para que los planos kx-2y+2z=0 y 4x+ky-6x+9=0 sean perpendiculares entre sí.

121. Halle la ecuación cartesiana de la recta que pasa por el punto A=(2,2,-3) y es perpendicular al plano π:P={(1,1,2)+s(3,-1,2)+t(5,1,-5)|s,t$\in$P}

122. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta L={(1,1,1)+t(1,-2,3)|t$\in$P}y que pasa por el punto P=(-1,2,3)

123. Calcule la ecuación cartesiana del plano que pasa por P=(2,1,5) y contiene a la recta L={(2,8,0)+t(1,-3,4)|t$\in$P}

124. Dadas la recta L_1, con vector director **u=**(2,3,-1), y la recta L_2, con **v=**(-1,4,5) como vector director, que se cortan en P=(2,1,1) escriba la ecuación de las rectas bisectrices. Note que si $\mathbf{u_1}$y $\mathbf{u_2}$ son vectores unitarios paralelos a las rectas L_1 y L_2 los vectores directores de las bisectrices son $\mathbf{u_1 \pm u_2}$

125. Calcule el ángulo entre los pares de rectas siguientes

a) $L_1 = \{(1,2)+t(1,3) \mid t \in \Re\}$ y $L_2 = \{(3,-5)+s(2,1) \mid s \in \Re\}$

b) $L_1 = \{(2,1)+t(3,5) \mid t \in \Re\}$ y $L_2 = \{(x,y) \mid 2x+3y-5=0\}$

c) $L_1 = \{(7,0,2)+t(1,5,0) \mid t \in \Re\}$ y $L_2 = \{(3,2,7)+s(3,4,0) \mid s \in \Re\}$

d) $L_1 = \{(x,y) \mid x+3y=-2\}$ y $L_2 = \{(x,y) \mid 3x-2y=4\}$

126. Determine el ángulo (agudo) entre los planos:

$P_1=\{(x,y,z)|2x-y-z=7\}$ y $P_2=\{(x,y,z)|x+y+2z=11\}$

127. Halle el ángulo entre los planos $x+y+\sqrt{2}z=1$ y $x+y=1$

128. Determine la ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por P=(7,-3) y es ortogonal a la recta $L=\{(x,y)|5x-8y=13\}$

129. Determine una ecuación cartesiana de la recta que pasa por el punto (1,5) y es ortogonal a la recta $L=\{(0,1)+t(3,-2)\}$

130. Determine una ecuación cartesiana de la recta que pasa por el punto P=(3,1) y es ortogonal a la recta $L=\{(x,y)|2x-y-6=0\}$

131. Determine una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto P=(-1,-2,5) y es ortogonal al vector **u=**(4,-7,11)

132. Determine una ecuación de un plano al que pertenece el punto M=(2,-1,-3) y es perpendicular a la recta (0,1,0)+t(-4,0,-5)

133. Determine una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto (1,-2,3) y es perpendicular a la recta: $\frac{x-1}{2}=y-3=\frac{z}{2}$

134. Determine una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (3,-1,4) y es perpendicular al plano x+2y-z=5

135. Determine una ecuación de la recta a la que pertenece el punto P=(-1,2,3) y es paralela al plano 2x-5y+3z=4

136. Determine la ecuación de un plano que pase por el punto Q=(5,5,-5) y sea paralelo a la recta de ecuación (x,y,z)=(2,-1,-2)+t(6,9,-4)

137. Determine la distancia entre los puntos P=(2,3) y Q=(3,7)

138. Encuentre el punto de la recta 2x+3y=1 más próximo al punto (3,-6)

139. Calcule la distancia del punto P=(7,3) a la recta $L=\{(3,0)+t(1,2)\}$

140. Dada la recta $L=\{(x,y)|2x-y=1\}$ y el punto A=(-3,4) determine el punto de la recta más cercano a A y la distancia de A a la recta.

141. Verifique si las siguientes rectas son paralelas y, en caso afirmativo, encuentre la distancia entre ambas:

$L_1: 3x+4y=7 \qquad L_2:(x,y)=(2,-1)+t(-4,3)$

142. Diga si la recta que pasa por los puntos (4,-1) y (7,2) biseca al segmento cuyos extremos son los puntos (8,-3) y (-4,-3)

143. Sea el plano P=$\{(x,y,z)|2x+3y-z-4=0\}$ y el punto Q=(3,4,5). Calcule el punto del plano más cercano a Q y la distancia de Q al plano.

144. Calcule la distancia entre el plano x+2y-z=5 y el punto (3,4,0).

145. Calcule la distancia desde el plano P={(1,1,2)+s(3,-1,2)+t(5,1,-5)|s,t$\in$P} al punto P_0=(2,5,-7)

146. Dadas las rectas

$L_1=\{(3,5,-2)+t(11,5,0)|t\in\Re\}$ y $L_2=\{(1,1,-3)+s(-1,3,2)|s\in\Re\}$

I. Determine la ecuación del plano que contiene a L_1 y es paralelo a L_2

II. Calcule la distancia entre ambas rectas.

147. a) Calcule la distancia entre los planos paralelos: 2x+3y+4z=1 y 4x+6y+8z=1

b) Determine la ecuación de un plano paralelo a los anteriores que equidiste de los mismos.

148. Halle la ecuación de un plano que pasa por el punto (4,-1,0) y es perpendicular a los planos: x-3y+4z-9=0 y 2x+2y-z+11=0

149. Determine la ecuación del plano perpendicular al plano XZ que pasa por los puntos P=(4,-7-2) y Q=(12,-11,7)

150. Halle una ecuación del plano que pasa por la recta intersección de los planos 2x-y-z=2 y x+y-3z+4=0 y es perpendicular al plano 3x-4y-2z=9

151. Halle la distancia del punto (7,7,4) a la recta determinada por:

6x+2y+z-4=0 6x-y-2z-10=0

152. Halle la distancia entre las siguientes rectas paralelas:

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{8-z}{4}$ $\frac{x-1}{3}=\frac{2-y}{-4}=\frac{z+3}{-4}$

153. Halle la distancia entre las rectas alabeadas:

a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1}$ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$

b)(x,y,z)=(2,1,2)+t(2,1,0) (x,y,z)=(6,-2,1)+t'(-4,1,3)

154. Demuestre que la recta $\frac{x-2}{6}=\frac{3y+1}{-6}=\frac{1-z}{3}$ y el plano 2x-3y+6z+3=0 no se cortan y halle la distancia entre ellos.

Unidad 4: *Funciones y Gráficos*

Ejercicio Nº 1: Indicar cuales de las siguientes relaciones son funciones; en aquéllas que no lo son, determinar que parte de la definición de función no se verifica.

a) r : $\{a,\ b\} \to \{-1,\ 0,\ 1\}$ / $a \to \left\{\begin{smallmatrix}-1\\+1\end{smallmatrix}\right.$ $b \to 0$

b) r : Z $\to$ N / r (x) = 2x

c) r : R $\to$ R / r (x) = $\pm\sqrt{x}$

d) r : R $\to$ R / G = $\{(x,y) / x^2+y^2=1\}$

e) r : R $\to$ R / r(x) = $\frac{1}{x}$

f) r : R $\to$ R / r(x) = $\dfrac{1}{x^2}$

Ejercicio Nº 2:

a) Sea f (x) = $\sqrt{-x^2+4}$ Dar: f (2); f (-2); f (0); f (-1); f (4).

b) Sea f (x) = $\dfrac{-x^2+4}{x+2}$ Dar: f (1); f(0); f (2); f (-2).

Ejercicio Nº 3: Determine Dominio e Imagen de las siguientes funciones. Graficar.

a) f (x) = 2x -1

b) f (x) = $2x^2-2x-4$

c) f (x) = $(x - 2)^2$

d) f (x) = $x^2(x-3)$

e) f (x) = x^4-9x^2

f) f (x) = $\begin{cases} x & si\ \ x<0 \\ \sqrt{x} & si\ \ 0\le x<1 \\ 2x-1 & si\ \ x\ge 1 \end{cases}$

g) f (x) = $\dfrac{1}{x-2}$

h) f (x) = $\dfrac{1}{(x-2)^2}$

i) f (x) = $\sqrt{x-2}$

j) f (x) = $|x-1|$

k) f (x) = 0.7^x

l) f (x) = 3^x

m) f (x) = $\log_{10}$ (x)

n) f (x) = ln $|x|$

o) f (x) = $\sqrt{(\ln\ x)} \Leftrightarrow f(x)=|\ln\ x|$

p) f (x) = ln (l – x)

q) f (x) = -2x +3

r) f (x) = x^2+2x-2

s) f (x) = $\sqrt{(x-2)^2} \Leftrightarrow f(x) = |x-2|$

t) f (x) = $\sqrt{4-x^2}$

u) f (x) = $\sqrt{x^2-9}$

v) f (x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

w) f (x) = sen $|x|$

y) f (x) = $\sqrt{sen^2 x} \Leftrightarrow f(x) = |sen\ x|$

z) f (x) = ln $\left(x^2-x-2\right)$

<u>Ejercicio Nº 4</u>: De la observación de los gráficos de las funciones del ejercicio nº 3, determinar cuales de ellas son biyectivas. Efectuar una restricción de `` f ´´ en los casos en que no lo fueran, para que la restricción resulte biyectiva.

<u>Ejercicio Nº 5</u>: Dadas las funciones biyectivas siguientes, se pide:

1) Dar f $^{-1}$ 2) Graficar `` f ´´ y `` f $^{-1}$ ´´.

a) f : $R \to R / y = 2x-1$

b) f : $R \geq 2 \to R \geq 0 / y = (x-2)^2$

c) f : $R \geq 2 \to R \geq 0 / y = \sqrt{X-2}$

d) f : $R \to R > 0 / y = 0.7^x$

e) f : $R - \{2\} \to R - \{0\} / y = \dfrac{1}{x-2}$

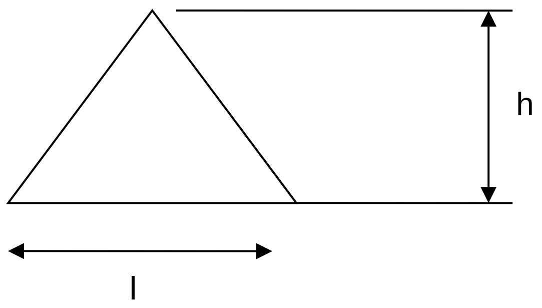
f) f = sen* : $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,\ 1] / x \to sen\ x$

g) f = tg* : $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \left]-\infty,\ +\infty\right[/ x \to tg\ x$

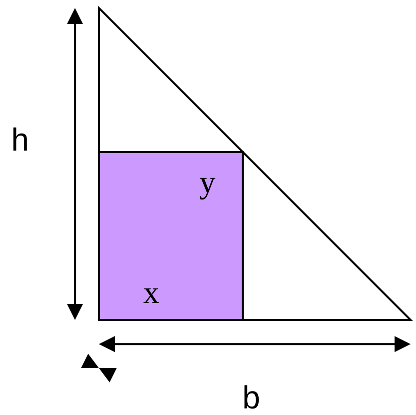
<u>Ejercicio Nº 6</u>: Dadas las funciones `` f ´´ y `` g ´´, definir, a partir de ellas las siguientes funciones (cuando ello sea posible), dando dominio, conjunto de llegada y ley de asignación: cf (con ``c ´´ constante); -3g; f-g; f-3g; g-f; f.g; f/g; g/f; gof; fog.

a) f (x) = $x+1$ g (x) = $x-1$
b) f (x) = e^x g (x) = $\sqrt{x}$
c) f (x) = $\sqrt{-2-x}$ g (x) = x^2
d) f (x) = $\cos\ x$ g (x) = $\sqrt[3]{x}$

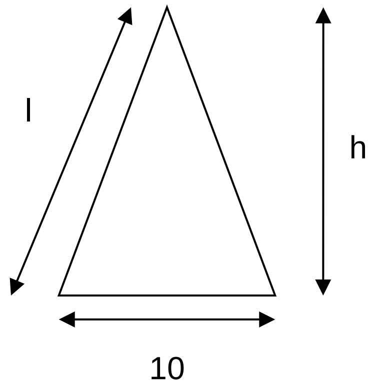
<u>Ejercicio Nº 7</u>: Problemas.



a) Sea el triángulo equilátero cuyos lados miden `` l ´´ y cuya altura mide `` h ´´ . Se pide:
1.- Expresar `` h ´´ como función de `` l ´´.
2.- Expresar `` l ´´ como función de `` h ´´.
3.- Expresar el área `` A ´´ como función de `` l ´´.
4.- Expresar el área `` A ´´ como función de ``h ´´.



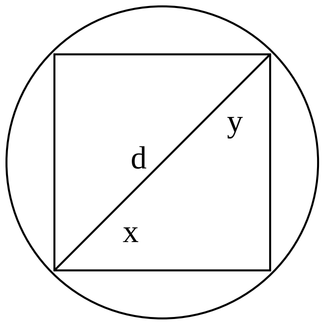
b) Sea el triángulo rectángulo de dimensiones determinadas `` b ´´ y `` h ´´ (constantes). En el se inscriben rectángulos de dimensiones variables `` x ´´ e `` y ´´ que apoyan dos lados en los catetos y un vértice sobre la hipotenusa. Se pide:
1.- Dar `` y ´´ en función de `` x ´´.
2.- Dar `` x ´´ en función de `` y ´´.
3.- Dar el área `` A ´´ del rectángulo en función de `` x ´´.
4.- Dar el área `` A ´´ del rectángulo en función de `` y ´´.



c) Sea el triángulo isósceles cuyos lados miden `` l ´´, y el lado desigual mide 10;

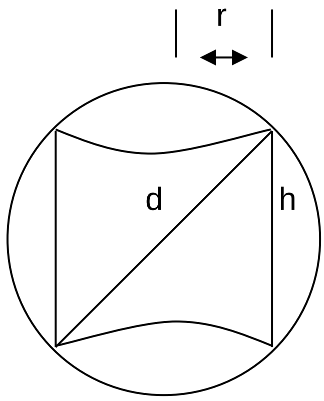
su altura, `` h ´´. Se pide:

1.- Expresar `` h ´´ como función de `` l ´´.
2.- Expresar `` l ´´ como función de `` h ´´.
3.- Expresar el área `` A ´´ como función de `` l ´´.



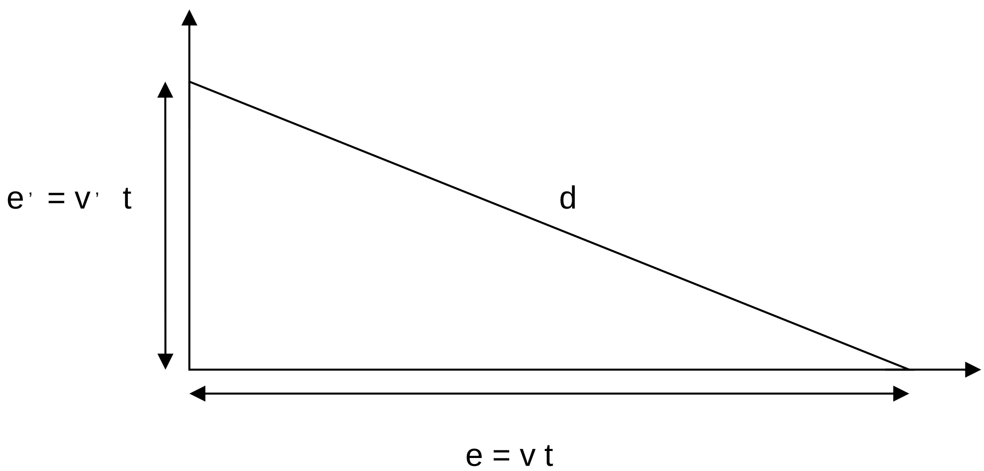
d) Sea una circunferencia de diámetro fijo `` d ´´ (constante). En ella se inscriben rectángulos de dimensiones variables `` x ´´ e `` y ´´. Se pide:

1.- La expresión de uno de los lados del rectángulo en función del otro.
2.- El área `` A ´´ del rectángulo en función de uno de los lados.
3.- El perímetro del rectángulo en función de uno de los lados.

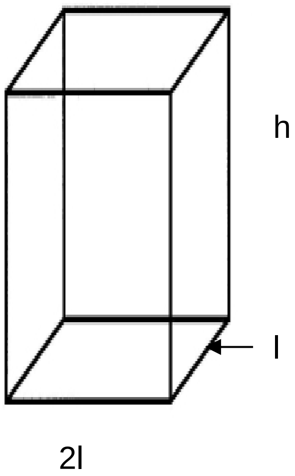


e) Sea una esfera de diámetro fijo `` d ´´ (constante). En ella se inscriben cilindros circulares de radio `` r ´´ y altura `` h ´´, variables. Se pide:

1.- La expresión de la altura del cilindro en función del radio del mismo.
2.- El volumen de `` V ´´ del cilindro en función de `` r ´´.
3.- El área lateral `` A ´´ del cilindro en función de `` r ´´.



f) Dos vehículos parten simultáneamente desde un mismo punto; uno de ellos a una velocidad de 80 Km. por hora y el otro , en dirección ortogonal, a 60 Km. por hora. Dar la relación que expresa la separación de ambos vehículos en función del tiempo.



g) Un paralelepípedo rectángulo tiene volumen V = 10 unidades; la longitud de uno de los lados de la base es el doble que la del otro. Se pide:
   1.- Dar la altura en función del lado menor de la base.
   2.- Dar el lado menor de la base en función de la altura.
   3.- Dar el área total de las caras del paralelepípedo en función de la altura.
   4.- Ídem 3.- pero en función del lado menor.

Ejercicio Nº 8: Demostrar

1) $(f+g)\circ h = (f\circ h)+(g\circ h)$ *para todo* $f,g,h \in R^R$

2) $(fg)\circ h = (f\circ h)(g\circ h)$ *para todo* $f,g,h \in R^R$

Unidad 5: *Límite y Continuidad*.

Ejercicio Nº 1: Dadas las funciones `` f ´´ se pide: graficar `` f ´´; determinar, si existe, lím f (x) para x $\rightarrow$ a en los puntos `` a ´´ indicados; en caso afirmativo dar su valor; si no existe el límite, justificar porqué.

a) f (x) = $\begin{cases} -x & si\ \ x \le 0 \\ l & si\ \ 0 < x < 4 \\ x & si\ \ x \ge 4 \end{cases}$ a = 0 a = 2 a = 4

b) f (x) = $\begin{cases} \sqrt{x} & si\ \ 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ \ x > 1 \end{cases}$ a = 0 a = 1

c) f (x) = $\begin{cases} 3x-2 & si\ \ x < 0 \\ x+1 & si\ \ x > 0 \end{cases}$ a = 0

d) f (x) = $\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x < 1 \\ x+1 & si\ \ x \ge 1 \end{cases}$ a = 1

e) f (x) = $|x|$ a = 0

f) f : $Z \to Z$ / f (x) = 2X a = -2 a = 1

g) f : $N \to Q$ / f (x) = $\dfrac{1}{2X}$ a = 1 a = 2

h) f : $Q \to R$ / f (x) = $\dfrac{1}{2X}$ a = $-\dfrac{1}{2}$ a = $\sqrt{2}$

<u>Ejercicio Nº 2</u>: Límites finitos de sumas, productos y cocientes de funciones.

a) $\lim\limits_{a}(-2)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - x - 1)$

c) $\lim\limits_{-1}(-3x^4 + 2)$

d) $\lim\limits_{h\to 0}(sen(a+h) - sen(a))$

e) $\lim\limits_{t\to 0}(5x - 2)$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sqrt{2x} + sen(\pi - x))$

g) $\lim\limits_{x\to \div 20}((x+2).\ln(x+3))$

¿ Es correcto tomar límite para x$\to$-4?

h) $\lim\limits_{-2}(e^{x+2}\sqrt{x+2})$

i) $\lim\limits_{e}(\ln(x).(2x - e))$

j) $\lim\limits_{1}\dfrac{x-1}{2x+3}$

k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{sen\,\dfrac{x}{3}}$

Ejercicio Nº 3: Demostrar que:

$$Si \ \lim_{x_0} g = L \neq 0, \ entonces \ \lim_{x_0} \frac{1}{g} \ existe$$

$$y \quad \lim_{x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{L}$$

Ejercicio Nº 4: *Límites Laterales*.
Determinar límite izquierdo y límite derecho en los puntos `` a ´´ indicados. Usar los gráficos de `` f ´´ para tal fin.

a) f (x) = $ent(x) = [x]$ a = 3

b) f (x) = $\text{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$ a = 0

c) f (x) = $\begin{cases} -\sqrt{x} & si \ 0 \leq x < 1 \\ \ln(x) & si \ x \geq 1 \end{cases}$ a = 0 a = 1

d) Con el mismo enunciado resolver los ejercicios: a); b); c); d) y e) del ejercicio Nº 1.

Ejercicio Nº 5: *Aplicación de límite notable*: $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$

a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{x}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{3x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(5x)}{2x}$ d) $\lim_{x \to 0} \frac{x - sen(x)}{x + sen(x)}$

e) $\lim_{x \to a} \frac{sen(x) - sen(a)}{x - a}$ (Ayuda: sen(x) – sen(a) = 2sen $\frac{x-a}{2}$.cos$\frac{x+a}{2}$)

Ejercicio Nº 6: Límite infinito. Generalización del concepto de límite. Calcular los límites siguientes y dar las ecuaciones de las rectas asíntotas, cuando ellas estén definidas.

a) $\lim_{x \to +\infty; x \to -\infty} (-2x^3 + 3x - 2)$ b) $\lim_{x \to +\infty; x \to -\infty} (x^5 - 5x^3 + 1)$

c) $\lim_{x \to +\infty; x \to -\infty} (5x^4 - 2)$ d) $\lim_{x \to +\infty; x \to -\infty} (-x^6 + 8x^4)$

e) $\lim_{x \to 2; x \to \pm\infty} \frac{-3}{x - 2}$ f) $\lim_{x \to -1} \frac{2x}{(x+1)^2}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3}{8 - x^3}$ h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{sen(x)}{x}$ (Ayuda: analizarlo como un producto).

j) $\lim\limits_{x \to 0^+; x \to +\infty} \dfrac{sen(x)}{\ln(x)}$ ¿Se puede tomar límite para $x \to 0^+$ y para $x \to -\infty$?

k) $\lim\limits_{x \to 0-; x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ ¿Se puede tomar límite para $x \to 0^-$ y para $x \to -\infty$?

<u>Ejercicio Nº 7</u>: *Indeterminación del límite*.
Resolver los siguientes límites indeterminados. Dar las ecuaciones de las rectas asíntotas horizontales y verticales cuando ellas estén definidas.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 9} - x)$ b) $\lim\limits_{y \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2})$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x - 4}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty; x \to -\infty} \dfrac{-x^{2-x}}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4}$ f) $\lim\limits_{x \to 0 : x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 - x}{x^2 + x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1; x \to \pm\infty} \dfrac{x - 1}{2x^3 - 2x^2}$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty; x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to 2; x \to +\infty; x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - 4x}{x - 2}$ j) $\lim\limits_{x \to 1; x \to +\infty; x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$

<u>Ejercicio Nº 8</u>: *Calcular el límite de la función potencial – exponencial*.

a) $\lim\limits_{x \to \pi/4} (sen(x))^{\pi/2-x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (5x^3 + 2)^{\frac{sen(3x)}{4x}}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} (1 + 2)^{1/5x}$ ¿Es correcto tomar límite para $x \to -1$?

<u>Ejercicio Nº 9</u>: Basándose en el límite notable $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ o también $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + 1/x)^x = e$, se pide calcular, mediante artificios de tipo algebraico, las formas indeterminadas del tipo: 1^∞

a) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{3}{x})^x$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \dfrac{2}{x})^x$

c) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$ d) $\lim_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{2}{x}}$

Ejercicio Nº 10: *Continuidad en un punto*.
De la observación de los gráficos de las funciones del ejercicio Nº 1, determinar si dichas funciones son continuas en los puntos indicados. Justificar la respuesta en cada caso. En los puntos donde `` f ´´ no es continua indicar cuál o cuáles de las condiciones para la continuidad no se cumplen. Clasificar el tipo de discontinuidad.

Ejercicio Nº 11: *Continuidad en un punto*.
Determinar que tipo de discontinuidad presentan las funciones del ejercicio nº 4 en los puntos indicados para la determinación del límite. Si es posible, definir una extensión que sea continua en dichos puntos.

Ejercicio Nº 12: *Continuidad de la función compuesta*.
Estudiar la continuidad de la funciones compuestas h (x) en los puntos `` a ´´ indicados. Calcular $\lim_{x\to a}$ h (x) cuando ello sea posible.

a) h(x) = $sen(\ln(x-1))$ a = 2

b) h(x) = $\left(\frac{sen(2x)}{sen(x)}\right)^3$ a = 0

c) h(x) = $ln\left(2-\frac{sen(x)}{x}\right)$ a = 0

d) h(x) = $\sqrt[3]{\frac{x+4}{x^2-16}}$ a = -4

e) h(x) = $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ a = 0

f) h(x) = $\left(\frac{|x|}{x}\right)^4$ a = 0

Ejercicio Nº 13: *Continuidad en un conjunto.*
Estudiar la continuidad de las funciones `` f ´´ en los puntos de acumulación de su dominio de definición, indicando los puntos de discontinuidad, si los hubiera.

a) $f(x) = -2x^3 + 3x - 2$ b) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 1$

c) $f(x) = 5x^4 - 2$ d) $f(x) = -x^6 + 8x^4$

e) $f(x) = \frac{-3}{x-2}$ f) $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$

g) $f(x)=\dfrac{x^3}{8-x^3}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

i) $f(x)=\dfrac{sen(x)}{x}$ j) $f(x)=\dfrac{sen(x)}{\ln(x)}$

k) $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$

Ejercicio Nº 14: Demostrar que:
"Si *f* es continua en un intervalo cerrado [a , b], entonces *f* es acotada sobre [a , b]".

Ejercicio Nº 15*: Aplicación de los teoremas relativos a funciones continuas en un intervalo cerrado.* Justificar en cada caso.

a) Determinar si la función polinómica $f(x)=x^2-2x-3$ cumple con las condiciones de hipótesis de los teoremas de `` Bolzano ´´ y del teorema de la acotación en los intervalos: $[-2,\ 0]$; $[1,\ 5]$; $[4,\ 6]$.

b) Ídem para $f(x)=-x^3+x^2+6x$ en los intervalos: $[-3,\ -1]$; $[-1,\ 1]$; $[1,\ 2]$; $[2,\ 4]$.

c) Ídem para $f(x)=\dfrac{-3}{x-2}$ (función racional), en $[-1,\ 1]$; $[1,\ 3]$.

d) Ídem para $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$ (función racional), en $\left[-2\ ;-1\right]$; $\left[-0{,}5\,;1\right]$.

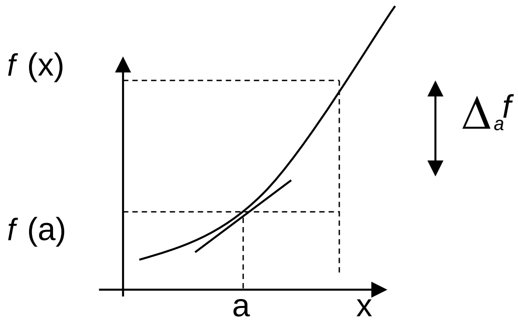
e) Ídem para $f(x)=\dfrac{x^3}{8-x^3}$ (función racional), en $[-2,\ 1]$; $[1,\ 3]$.

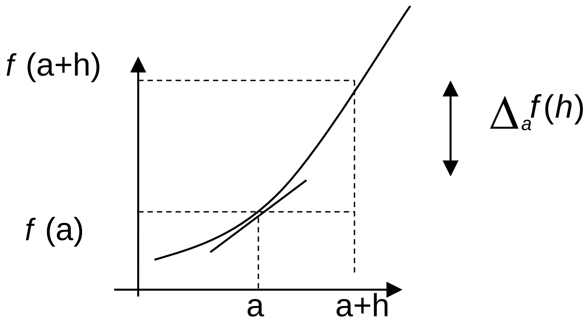
f) determinar si la función racional $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ cumple con las condiciones de hipótesis de `` teorema del Valor Intermedio ´´ en el intervalo $[0,\ 2]$. Verificar si el

número real K = 1 es imagen de algún elemento c $\in]0,\ 2[$. (ayuda resolver la ecuación $\dfrac{x^2}{x-1}=1$).

g) Ídem si $f(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$ en el intervalo $[-2,\ 0]$. Verificar si el número real K =1 es imagen de algún elemento c $\in\ (0,\ 2)$.

<u>Unidad 6:</u> *Derivada*





$[\Delta_a f](x) = f(x) - f(a)$
$[\Delta_a f](h) = f(a+h) - f(a)$

<u>Ejercicio Nº 1</u>:
Sea $f(x) = 2x^2 - 1$. Se pide:

a) Dar la `` función incremento de f en $a = 1$ ´´, en las dos formas.

b) Dar la `` función cociente incremental ´´, en las dos formas.

c) Dar el límite de la función cociente incremental, cuando el incremento de la variable tiende a cero, en las dos formas.

d) ¿Qué representa el número así obtenido?

<u>Ejercicio Nº 2</u>:
Aplicando la definición de derivada, calcular, si existen, las derivadas de ``f ´´ en los puntos indicados.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a = 0

b) $f(x) = \dfrac{-2x^2}{x-1}$ a = 1; a = -1

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ a = 0

d) $f(x) = |x|$ a = 0

<u>Ejercicio Nº 3</u>:

Aplicando la definición, calcular las derivadas a la derecha de `` a ´´: $f'_+(a)$, y a la izquierda de `` a ´´: $f'_-(a)$, de las funciones f , en los puntos indicados. En base a esos resultados, determinar si dichas funciones son derivables o no en dichos puntos. ¿En cuáles casos se puede aplicar el teorema: Si ``$f$ ´´ es derivable en `` a ´´, entonces ``$f$ ´´ es continua en `` a ´´. O bien su equivalente contrarrecíproco: Si ``$f$ ´´ no es continua en `` a ´´, entonces ``$f$ ´´ no es derivable en `` a ´´? ¿En cuáles casos ``$f$ ´´ en continua en `` a ´´, pero no es derivable en `` a ´´?.

a) f (x) = $\begin{cases} \sqrt{x} & si \;\; 0 \le x < 1 \\ l / x & si \;\; x \ge 1 \end{cases}$ en a = 0 y a = 1

b) f (x) = $\begin{cases} x^2 + 1 & si \;\; x < 1 \\ x + 1 & si \;\; x \ge 1 \end{cases}$ en a = 1

c) f (x) = $\begin{cases} -x & si \;\; x \le 0 \\ l & si \;\; 0 < x < 4 \\ \sqrt{x} & si \;\; x \ge 4 \end{cases}$ en a = 0 y a =4

d) f (x) = $\begin{cases} -\sqrt{x} & si \;\; o \le x < 1 \\ \ln x & si \;\; x \ge 1 \end{cases}$ en a = 0 y a = 1

e) f (x) = $|x + 2|$ en a = -2

<u>Ejercicio Nº 4</u>:
Aplicando las reglas de derivación, encontrar la función f' (función derivada primera de la función f).

a) $f(x) = 2x^2 - 3x^{2/3} + 5x^{-1/3} + 8$

b) $f(x) = \dfrac{x^5 - 4x^3}{3}$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = 5.e^x$

e) $f(x) = x.e^x$

f) $f(x) = b^x.x^b$

g) $f(x) = \dfrac{b^x}{e^x}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

i) $f(x) = \left(x^3 - 2x^2\right)^5$

j) $f(x) = \left(sen\left(x^2\right)\right) - \sqrt{\cos(x)}$

k) $f(x) = b^{3+2}$

l) $f(x) = \log_b(x+1)$

m) $f(x)=e^{-x}.\ln(\cos x)$

n) $f(x)=\frac{\pi}{x}sen\left(\frac{\pi}{x}\right)+tg\left(\frac{\pi}{x}\right)$

o) $f(x)=\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

p) $f(x)=2\ln\left(sen\left(\pi-\sqrt{x}\right)\right)$

q) $f(x)=\ln\sqrt[3]{sen\frac{x}{3}}$

r) $f(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}$

s) $f(x)=\left(\left((e)^{e}\right)^{e}\right)^{x}$

Ejercicio Nº 5:
Encontrar la función *f ’* de las siguientes funciones *f* del tipo potencial – exponencial aplicando la técnica de la derivación logarítmica.

a) $f(x)=x^{x}$

b) $f(x)=\sqrt[x]{3x}$

c) $f(x)=(senx)^{\frac{\pi}{2}-x}$

d) $f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^{1/x}$

e) $f(x)=\left(4x^{3}+2\right)^{\frac{sen3x}{4x}}$

f) $f(x)=\left((x)^{x}\right)^{x}$

Ejercicio Nº 6:
Encontrar la función *f ’* de las siguientes funciones *f* aplicando el teorema de la derivada de la función inversa.

a) $f(x)=\arccos(x)$

b) $f(x)=arctg(x)$

Ejercicio Nº 7:
Aplicando las reglas de derivación, encontrar la función f'.

a) $f(x)=\arccos(x).arcsen(x)$

b) $f(x)=\cos\left(\text{arc}\,sen(x)\right)$

c) $f(x)=\text{arc}\,tg\left(\frac{x^{3}}{2}\right)$

d) $f(x)=e^{arctg\left(3x^{2}\right)}$

e) $f(x)=\left(\text{arcs}en\left(\frac{x^{3}}{3}\right)\right)^{4}$

f) $f(x)=\ln\left(\text{arcs}en\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

g) $f(x) = \text{arc}\,sen\left(\ln\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\right)$ h) $f(x) = \dfrac{\pi - arcsenx}{\arccos x}$

Ejercicio Nº 8: Encontrar la función *f '* correspondiente a cada una de las siguientes funciones *f* :

a) f(x) = $\text{senh}^2(2x)$

b) f(x) = cosh(2x). senh(4x)

c) f(x) = $\tanh^2(2x) / \text{senh}^2(2x)$

d) f(x) = $\tanh^2(3x)$

Ejercicio Nº 9:
Calcular las derivadas sucesivas hasta el 5º orden para cada función *f* :

a) $f(x) = -2x^4 + 3x^3 - x^2 + 2$ b) $f(x) = e^{3x}$

c) $f(x) = \sqrt{2x}$ d) $f(x) = \ln(1-x)$

Aplicación Geométrica de la Derivada

Ejercicio Nº 10:
Dar la ecuación de la recta tangente al gráfico de *f* en los puntos indicados. Graficar *f* y la recta tangente.

a) $f(x) = -x^2 + 1$ en x = 1

b) $f(x) = -\ln x$ en x = 2

c) $f(x) = 2e^{x/2}$ en x = 2

d) $f(x) = 2\sqrt{x}$ en x = 1

Ejercicio Nº 11:
Determinar el ángulo que forma la tangente al gráfico de la función en los puntos indicados. Dar la ecuación de la recta tangente en cada caso. Graficar la función *f* y la recta tangente.

a) $f(x) = e^x$ en x =0

b) $f(x) = -\ln x$ en x = 1

c) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $\qquad \begin{cases} en\ x=0\ y \\ en\ x=2 \end{cases}$

d) $f(x)=senx$ $\qquad \begin{cases} en\ x=0\ y \\ en\ x=\pi \end{cases}$

Ejercicio Nº 12:
Determinar las coordenadas de los puntos de gráfico de f cuya tangente sea paralela a la recta de ecuación y = 2x +1. Dar la ecuación de la recta tangente.

a) $f(x)=-x^2+4x-4$ $\qquad$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

Ejercicio Nº 13:
Determinar las coordenadas de los puntos del gráfico de f cuya tangente es paralela al eje x. Dar la ecuación de la recta tangente.

a) $f(x)=2x^2+3x^2-12x$

b) $f(x)=x^4-2x^2+1$

c) $f(x)=e^{-x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Ejercicio Nº 14:
Determinar las coordenadas del o de los puntos del gráfico de f cuya tangente forma un ángulo de $\pi/4$ = 45º con la dirección positiva del eje x. Dar la ecuación de la recta tangente.

a) $f(x)=e^x$

b) $f(x)=\ln x$

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$

Ejercicio Nº 15:

Determinar las coordenadas del o de los puntos del gráfico de f cuya tangente forma un ángulo de $3\pi/4$ = 135º con la dirección positiva del eje x. Dar la ecuación de las rectas tangentes.

a) $f(x) = -\ln x$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Ejercicio Nº 16:
Determinar, si existen, los puntos del gráfico de f cuya tangente sea paralela al eje `` y ´´. En caso afirmativo dar las coordenadas de dichos puntos.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Ejercicio Nº 17:
Mostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = (x+1)^2$ *y* $g(x) = -x^2 + 6x - 1$ tienen una recta tangente común. Dar las coordenadas del punto donde ello ocurre y también dar la ecuación de la recta tangente común.

Aplicación Física de la Derivada

Concepto de grado de variación o tasa de variación

Sea f una función cuya ley de asignación expresa la relación que vincula una magnitud determinada, respecto de una variable x. La derivada de f respecto de x se denomina grado de variación de la magnitud respecto de la variable x. Cuando la variable x es el tiempo se designa velocidad de variación. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: sea $f(t)$ la ley que indica el espacio recorrido en función de la variable tiempo; entonces la df/dt es la velocidad de variación del espacio, respecto al tiempo. A su vez, la velocidad de variación de la velocidad respecto al tiempo, es decir $d^2f / d\ t^2$, se llama aceleración.

Ejemplo 2: La función v(x) = x^3 expresa el volumen de un cubo de lado x.
El grado de variación del volumen del cubo, respecto de la variable lado es:
dv/dx = $3x^2$.

Ejemplo 3: La función p(x) = δx^3 expresa el peso de un cubo de lado x con peso específico δ; dp/dx = 3δ x^2 expresa el grado de variación del peso del cubo respecto a la variable lado.

Ejemplo 4: La función s (x) = $6x^2$ da el área de la superficie de un cubo con respecto a la longitud del lado x; ds/dx = 12x expresa el grado de variación del área del cubo respecto a la variable lado.

Ejemplo 5: El grado de variación del área de un disco con respecto a su radio `` r ´´ es: ds/dr = 2πr, siendo s (r) = $\pi .r^2$.

Ejemplo 6: El grado de variación del volumen de un cilindro recto con respecto al radio `` r ´´ es: dv/dr = (2π h).r, siendo v (r) = (hπ) r^2.

Ejercicio Nº 18:
Problema. Un depósito en forma de cilindro circular recto tiene un radio de r = 3m. ¿Cuál es la velocidad de variación de la altura `` h ´´ del líquido contenido en el depósito, si éste fluye al depósito a razón de $6m^3$ por minuto?.
Ayuda: Se aplica la derivada de una función compuesta: dv/dt = (dv/dh).(dh/dt).

Ejercicio Nº 19:
Problema. Una bola de hierro de 20cm de diámetro está recubierta de una capa de hielo de espesor uniforme; si el hielo se funde a razón de $65cm^3$ por minuto, encuéntrese con qué rapidez decrece el espesor del hielo cuando es de 5cm, y con qué velocidad decrece el área externa en ese mismo instante.

Volumen de la esfera v (r) = $\frac{4\pi}{3} r^3$

Área de la esfera s (r) = $4\pi r^2$.

Aplicaciones del Diferencial

Ejercicio Nº 20:
Sea $f(x) = 3x^3 - 1$; se pide calcular por medio del diferencial el valor aproximado del incremento de la función f en el punto a = -1, para incremento de la variable h = -0.01.

Ejercicio Nº 21:
Un disco metálico de 7cm de radio se dilata por la acción del calor, pasando a medir 7,08cm. ¿Cuál será la variación del área de la superficie del disco?.

Unidad 7: *Teoremas del Valor Medio. Regla de L'Hôpital.*

Ejercicio Nº 1:
Determinar si las funciones f dadas cumplen con la hipótesis del teorema de Rolle; en caso afirmativo determinar el punto `` c ´´ que asegura el teorema. En caso negativo explicar las partes de la hipótesis que no se cumplen.

a) $f(x) = x^4 - 8x$ *en* $[0;2]$

b) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ *en* $[-3;0]$ *y en* $[-1;1]$

c) $f(x) = |x-1| - 1$ *en* $[0;2]$

Ejercicio Nº 2:
Determinar si las funciones f dadas, cumplen con la hipótesis del `` Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial ´´. En caso afirmativo, determinar el punto `` c ´ que asegura el teorema. En caso negativo explicar las partes de la hipótesis que no se cumplen.

a) $f(x)=(x-2)^{2/3}$ $\quad$ *en* $[1;3]$

b) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ $\quad$ *en* $[0{,}5;5]$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$ $\quad$ *en* $[-3;-1]$ *y en* $[-1;1]$

d) $f(x)=(5x)^{3/2}+x^2$ $\quad$ *en* $[-1;1]$

Ejercicio Nº 3:
Determinar si las funciones dadas `` $f$ ´´ y `` g ´´ cumplen con las hipótesis del `` teorema del Valor Medio Generalizado ´´. E n caso afirmativo determinar el punto `` c ´´ de la fórmula: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. En caso negativo explicar las partes de la hipótesis que no se cumplen.

a) $f(x)=x^3-2x^2+x$ $\quad$ $g(x)=-x^2+1$ $\quad$ *en* $[-1;2]$

b) $f(x)=x^3$ $\quad$ $g(x)=x^3+3x^2+3x$ $\quad$ *en* $[0;3]$

c) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ $\quad$ $g(x)=\sqrt{x}$ $\quad$ *en* $[0;16]$

Ejercicio Nº 4:
Por medio de la regla L´Hôpital resolver los límites indeterminados siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{-3x^3+5x-2}{x^2-4x+3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{senx}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{e^{4x}}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\ln x}{x(\ln x)}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}x}{2x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{senx - x}{x^3}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x.sen\left(1/x\right)\right)$

n) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(x).\ln(x-1)\right]$

o) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2xe^{3x}\right)$

p) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left[\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right).tgx\right]$

q) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx - \dfrac{1}{x}\right)$

r) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

Función potencial exponencial.

s) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^x\right)$

t) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{senx}\right)$

u) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

v) $\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{1/x}$

w) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1-x)}\right)^x$

x) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{senx}$

y) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$

z) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(1+x)\right]^{1/x}$