EJERCICIO DE FUNCIONES, OPERACIONES CON FUNCIONES, INYECTIVIDAD, SURYECTIVIDAD, BIYECTIVIDAD

Sean las funciones

$f(x) = \ln(x^2 - 4)$ y

$g(x) = \sqrt{x}$.

¿Es la función compuesta $[g \circ f](x)$ biyectiva? Si no lo fuera hacer una restricción del dominio y/o modificar el conjunto de llegada para que lo sea.

Solución

La función compuesta es $[g \circ f](x) = g\big(f(x)\big) = g(\ln(x^2 - 4)) = \sqrt{\ln(x^2 - 4)}$

Con esta regla de asignación, $y = [g \circ f](x) = \sqrt{\ln(x^2 - 4)}$, está claro que y (el conjunto imagen) es mayor o igual a cero, pues la raíz $\sqrt{\ln(x^2 - 4)}$ tiene signo positivo.

Veremos cuál es el dominio de $g \circ f$:

El argumento de la función logaritmo debe ser mayor que 0, por lo que

$$x^2 - 4 > 0$$

$$x^2 > 4$$

$$|x|^2 > 4$$

$$|x| > 2$$

$$x > 2 \quad \text{ó} \quad x < -2$$

Ahora bien, el radicando de la raíz cuadrada debe ser mayor o igual a 0. Es decir:

$$\ln(x^2 - 4) \geq 0$$

Sabemos que la función logaritmo se anula cuando el argumento es 1, si el argumento es mayor o igual a 1 el logaritmo es mayor o igual que 0. Por tanto, para que el radicando sea mayor o igual a 0, debe cumplirse

$$x^2 - 4 \geq 1$$

Despejando x:

$$x^2 \geq 5$$

$$|x|^2 \geq 5$$

$$|x| \geq \sqrt{5}$$

$$x \geq \sqrt{5} \quad \text{o} \quad x \leq -\sqrt{5}$$

Como deben estar definidas la función logaritmo y la función raíz cuadrada, el dominio de la función compuesta, en principio, es la intersección de los dos dominios, o sea el conjunto:

$$D_{g \circ f} = (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$$

Sin embargo, es posible que con este dominio la función no sea inyectiva. Veamos:

Despejaremos x:

$$y^2 = \ln(x^2 - 4) \qquad \text{que equivale a} \qquad e^{(y^2)} = x^2 - 4$$

$$e^{(y^2)} + 4 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{e^{(y^2)} + 4}$$

Dado que la raíz tiene signo + y -, por cada valor de y hay dos valores de x, uno positivo y otro negativo, por lo que, para que la función sea inyectiva deberemos restringir el dominio, o sea los valores de x.

Del conjunto dominio determinado anteriormente

$$D_{g\circ f} = (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$$

optaremos por uno solo de los dos intervalos, escojamos solamente los valores positivos de x. Ahora el dominio de la función compuesta es

$$D_{g\circ f} = [\sqrt{5}, \infty)$$

Con este dominio la función es inyectiva, pues para cada valor de y corresponde un solo valor de x.

Para que sea suryectiva haremos que el conjunto de llegada coincida con el conjunto imagen.

En la expresión

$$x = \sqrt{e^{(y^2)} + 4}$$

Se observa que y puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. También habíamos establecido que y (el conjunto imagen) es mayor o igual a cero, pues la raíz $\sqrt{\ln(x^2 - 4)}$ tiene signo positivo.

Entonces el conjunto imagen (y el conjunto de llegada) es

$$I_{g\circ f} = [0, \infty)$$

En definitiva, la función compuesta, para que sea biyectiva, debe ser definida de la siguiente manera:

$$\boxed{[g\circ f](x):\ [\sqrt{5}, \infty) \longrightarrow [0, \infty);\ y = \sqrt{\ln(x^2 - 4)}}$$

La función [g+f] es:

$$[g + f](x) = g(x) + f(x) = \ln(x^2 - 4) + \sqrt{x}$$

La función [gf] es:

$$[gf](x) = g(x)f(x) = \ln(x^2 - 4)\sqrt{x}$$

En estos dos últimos casos el dominio es la intersección de los dos dominios, es decir $(2, \infty)$.