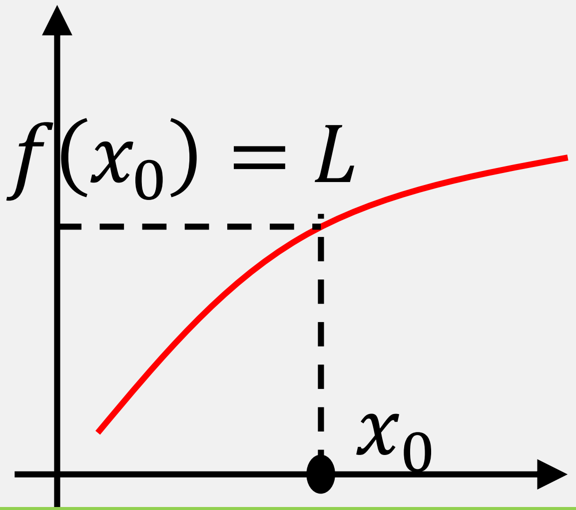
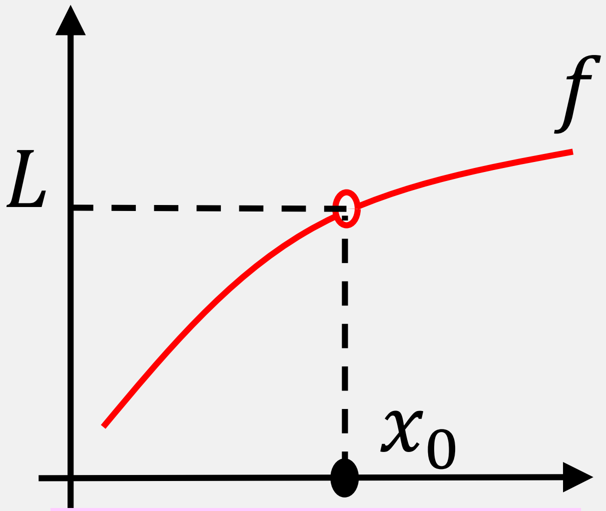
CONTINUIDAD

Idea intuitiva: Una función es continua en x_0, si su gráfico no presenta un corte o una interrupción en ese punto.



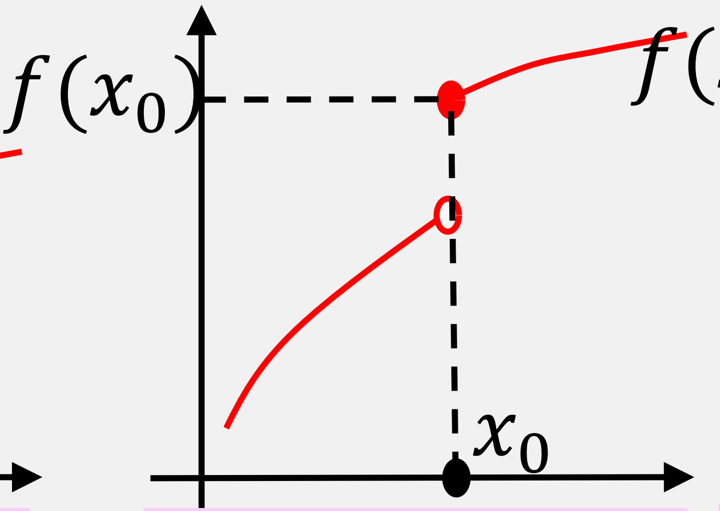
f es continua en x_0

$\boldsymbol{f(x_0) = L}$



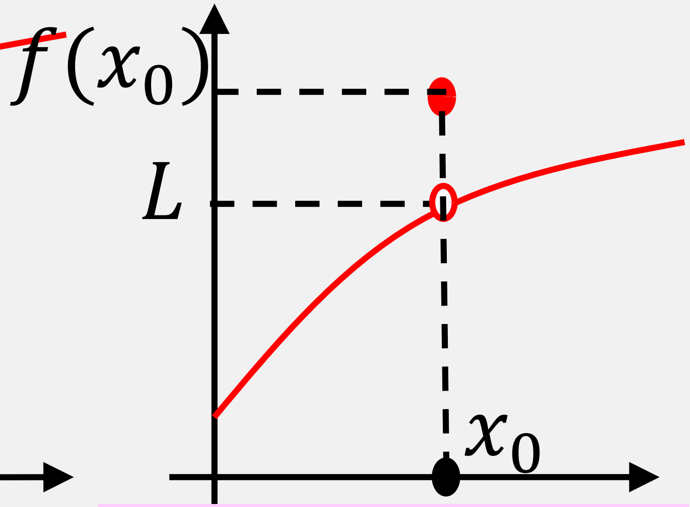
f no es continua en x_0

$\boldsymbol{\nexists f(x_0)}$



f no es continua en x_0

$\boldsymbol{\nexists L}$



f no es continua en x_0

$\boldsymbol{f(x_0) \neq L}$

Función continua en un punto

Definición

Una función f es continua en un punto x_0 de su dominio si

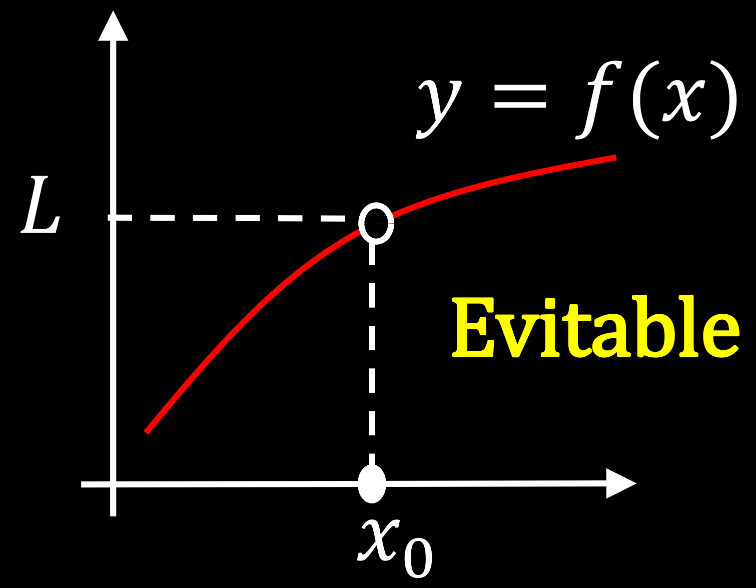
$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad / \quad |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0| < \mathcal{E}.$$

Nota: esta definición se diferencia de la definición de límite en que, en esta, cuando x tiende a x_0, f tiende a $f(x_0)$; es decir, $L = f(x_0)$.

$$\boxed{\boldsymbol{f \text{ es continua en } x_0 \text{ si } L = f(x_0)}}$$

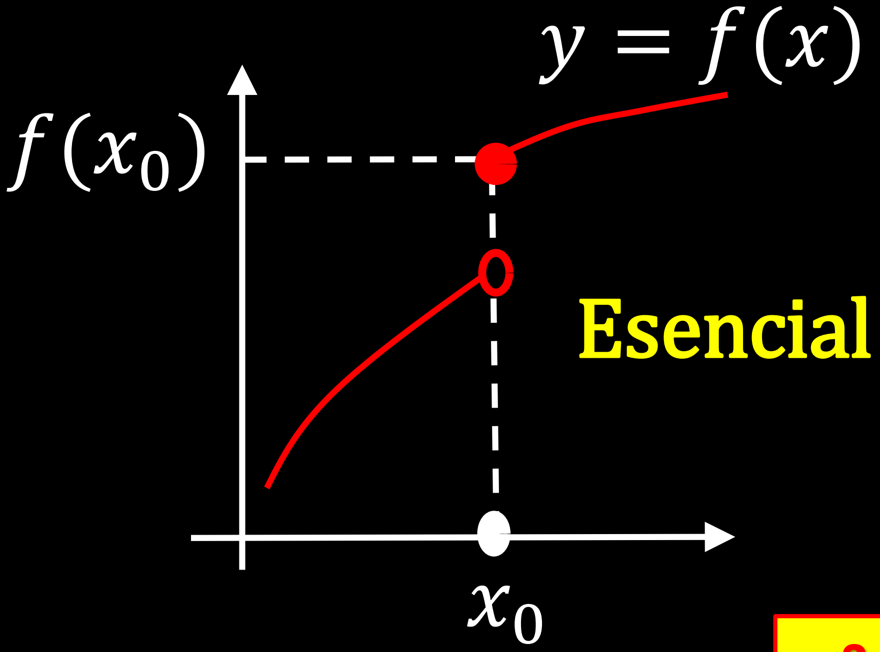
Discontinuidad evitable

Si f es discontinua en x_0 y existe el límite de f en x_0, la discontinuidad es evitable.



Discontinuidad esencial

Si f es discontinua en x_0 y no existe el límite de f en x_0, la discontinuidad es esencial.



Nota: Si la discontinuidad es evitable basta agregar un punto para que f sea continua.

Ejemplo

1. Sea $f: \mathbb{R} - \{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{R}; y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$

$$y = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

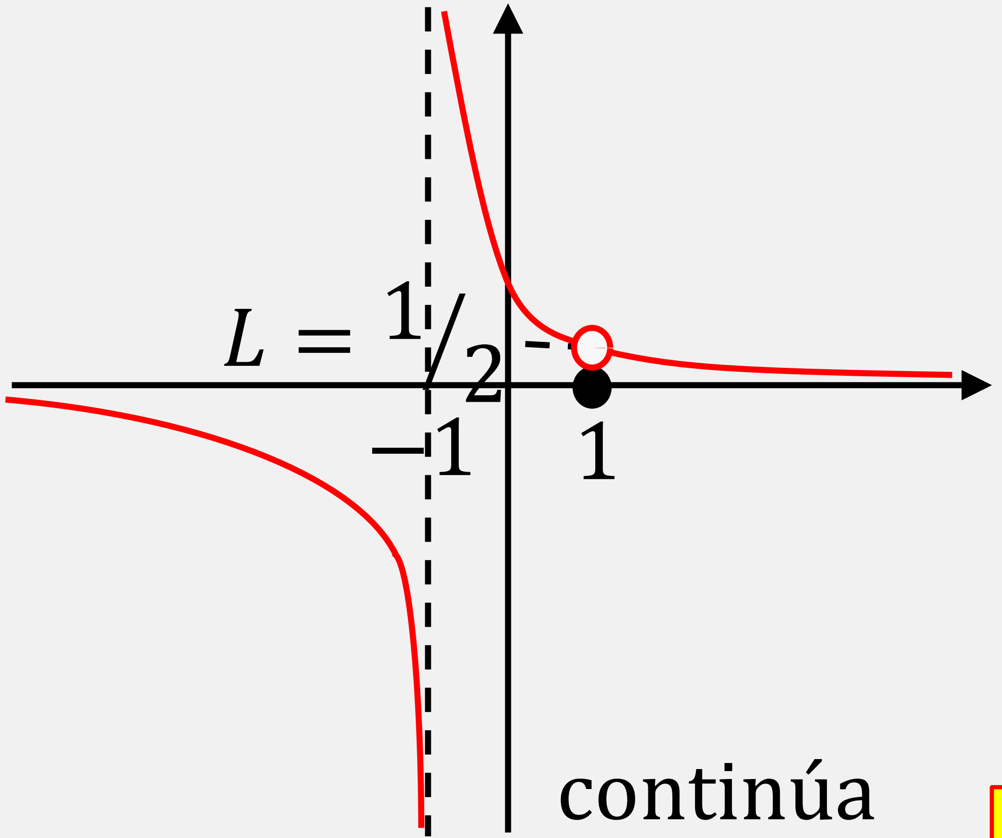
Raíces del denominador: $x = 1$ y $x = -1$; son puntos de discontinuidad pues en ellos $\nexists f(x)$.

$$\lim_{-1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{-1} \frac{1}{x+1} = \pm\infty$$

En $x = -1$ el límite no existe, la discontinuidad es esencial.

$$\lim_{1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(1)+1} = \frac{1}{2}$$

En $x = 1$ el límite existe, la discontinuidad es evitable.



continúa

Para hacer un gráfico aproximado de f, tendremos en cuenta los siguientes elementos:

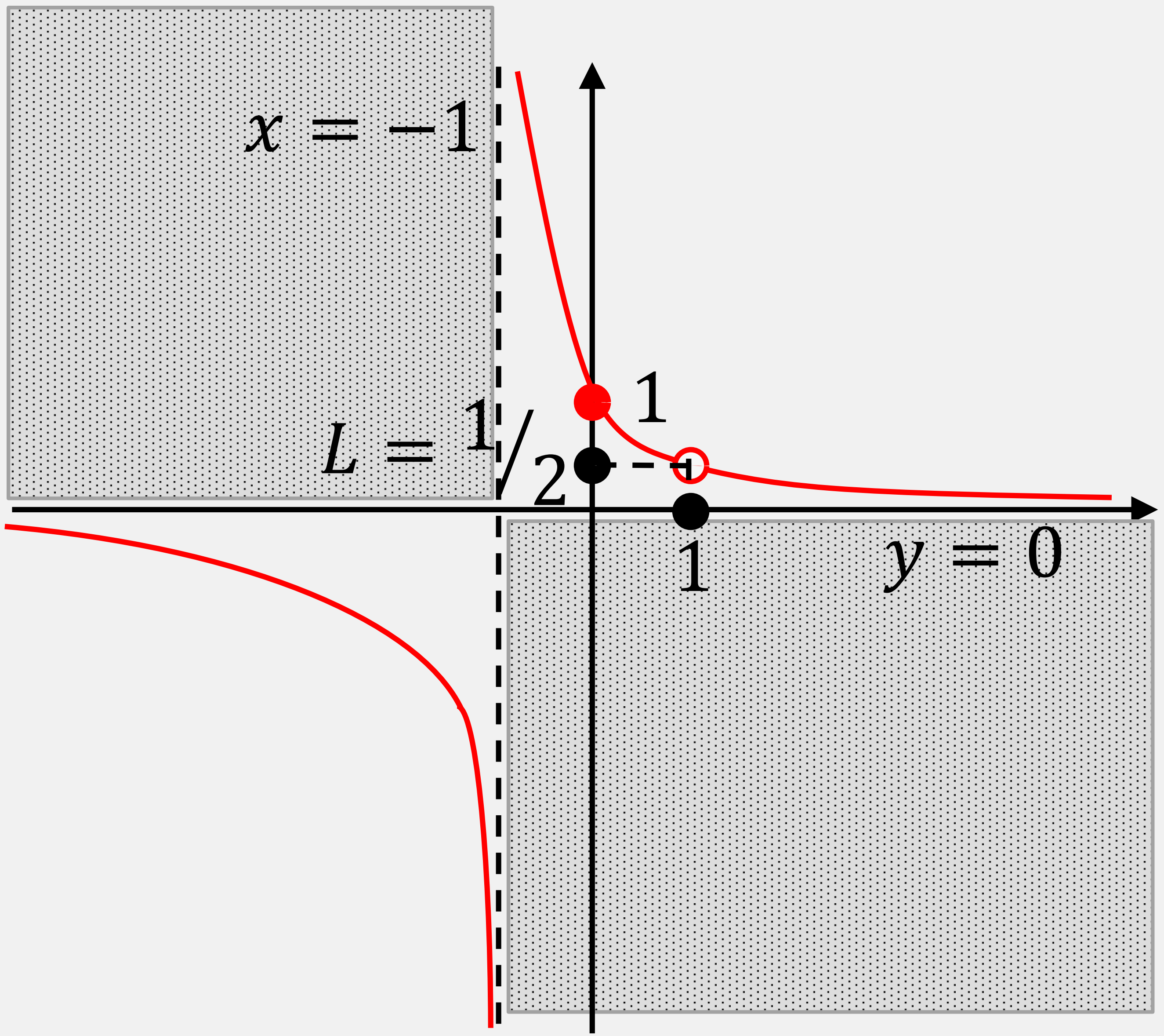
1. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$; del conjunto $\mathbb{R}$, descartamos los valores que anulan el denominador.
2. Paridad: $f(-x) = \frac{1}{(-x)+1} = \frac{1}{-x+1} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$ no tiene paridad.
3. Puntos de discontinuidad, clasificación: $x = -1$ (esencial); $x = 1$ (evitable).
4. Asíntotas verticales: $x = -1$.
5. Raíces: valores de D_f que anulan el numerador. No tiene raíces.
6. Corte con eje y: $f(0) = 1$.
7. Signos:

		-1	
$\frac{1}{x+1}$	$-$		$+$

8. Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{\pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow y = 0$

continúa

Ejemplo



Ejemplo

2. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\, y=\begin{cases} x & si\ x<0 \\ 4 & si\ 0\le x\le 2 \\ x^2 & si\ x>2 \end{cases}$

Puntos donde cambia la definición de f: $x=0$, $x=2$.

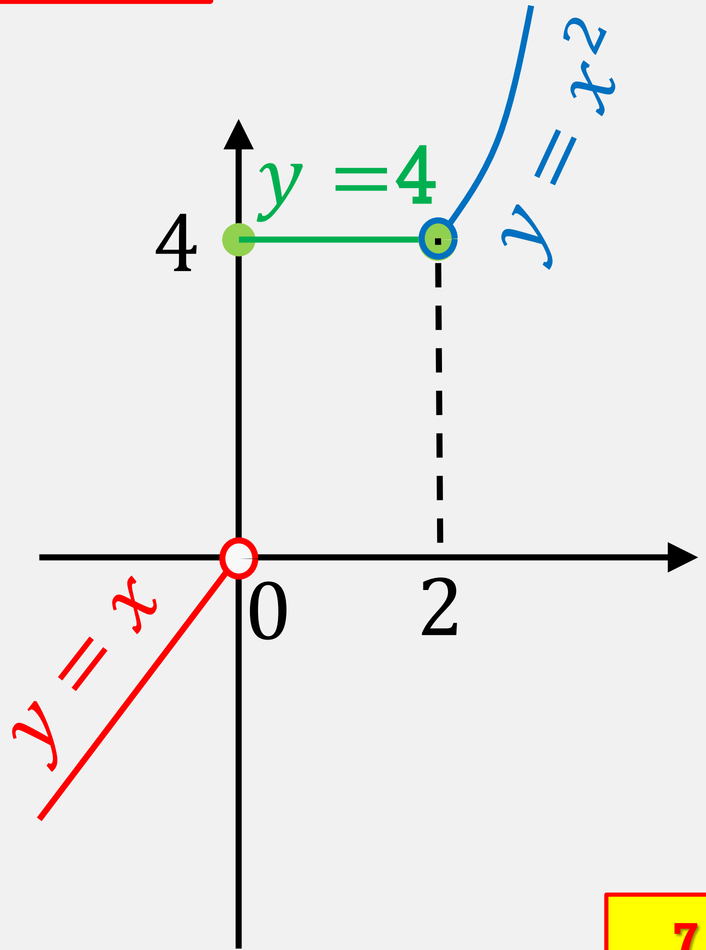
En $x=0$: $f(0)=4;\ \lim\limits_{0^-} x = 0 \neq \lim\limits_{0^+} 4 = 4$

$\nexists \lim\limits_{0} f(x) \Longrightarrow$ disc. esencial en $x=0$.

En $x=2$: $f(2)=4$

$\lim\limits_{2^-} 4 = 4 = \lim\limits_{2^+} x^2 = (2)^2 = 4 \Longrightarrow \lim\limits_{2} f(x) = 4$

$\lim\limits_{2} f(x) = f(2) \Longrightarrow f$ es continua en $x=2$



Función continua en un intervalo abierto

f es continua en un intervalo abierto (a, b)

si f es continua en x, $\forall\, x \in (a, b)$.

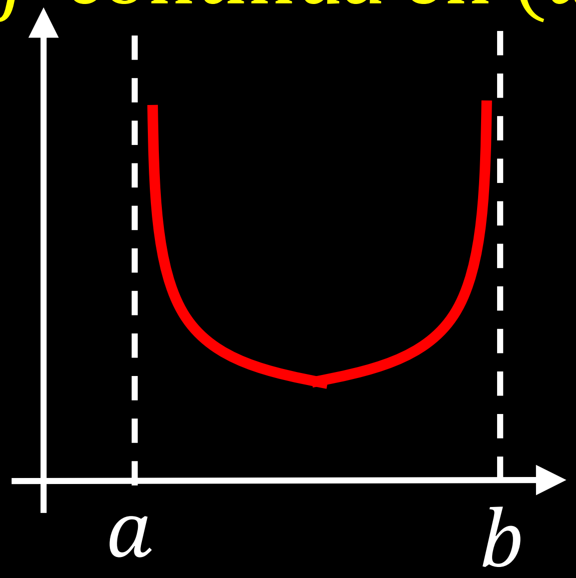
Función continua en un intervalo cerrado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$

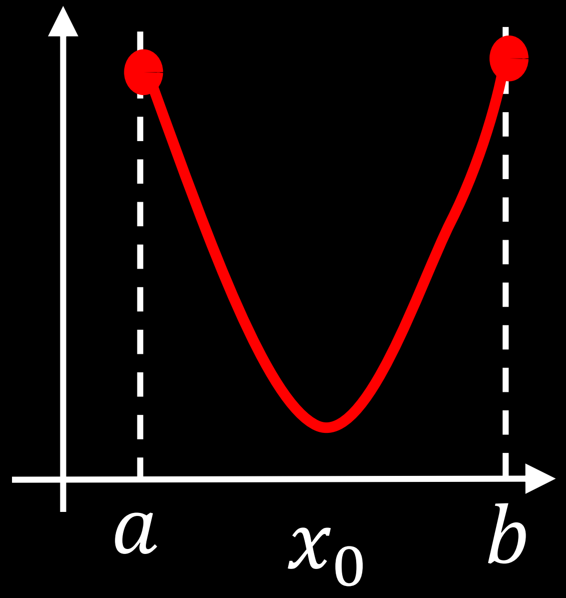
si f es continua en (a, b)

y $\lim\limits_{a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{b^-} f(x) = f(b)$.

f continua en (a, b)



f continua en $[a, b]$



Álgebra de funciones continuas

Teorema: Álgebra de funciones continuas

Sean f y g continuas en x_0.

Entonces $f+g$ es continua en x_0,

fg es continua en x_0 y

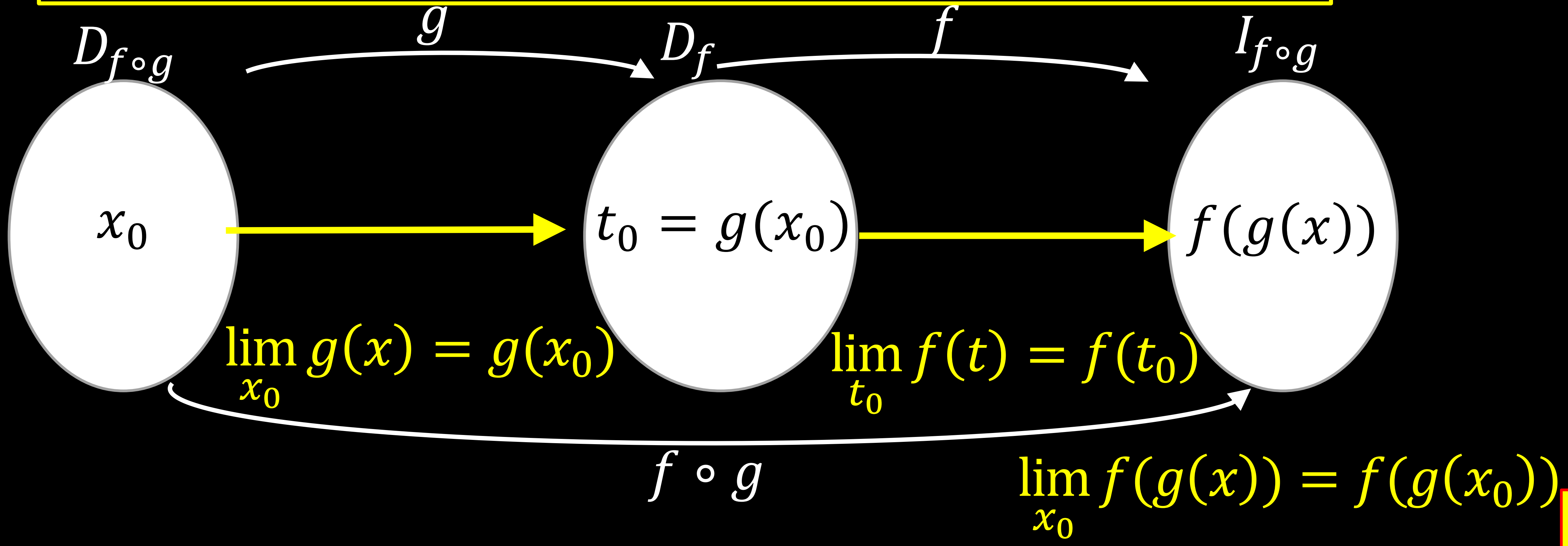
$\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0 si $\mathrm{g}(x_0) \neq 0$.

Teorema: Continuidad de la función compuesta

Si g es continua en x_0 y

f es continua en $t_0 = g(x_0)$,

entonces $[f \circ g](x)$ es continua en x_0.

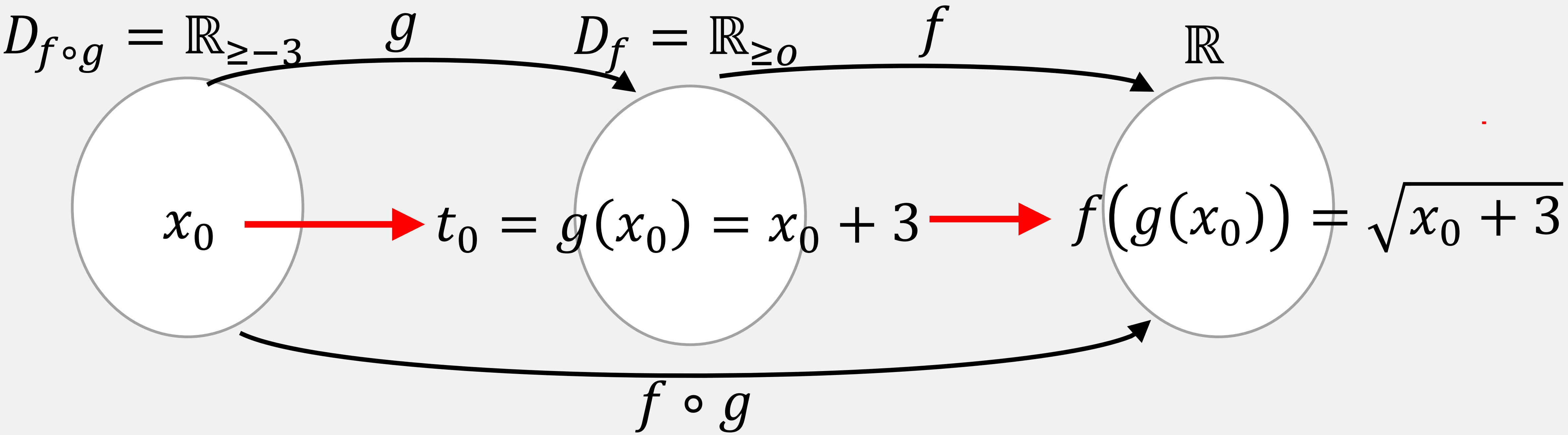


Ejemplo Sean $\boxed{g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\, g(x)=x+3}$; $\boxed{f:\mathbb{R}_{\geq 0}\longrightarrow\mathbb{R};\, f(t)=\sqrt{t}}$

g es continua en $\mathbb{R}$ pues $\lim\limits_{x_0} x+3 = f(x_0) = x_0+3 \;\; \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

f es continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ pues $\lim\limits_{t_0} \sqrt{t} = f(t_0) = \sqrt{t_0} \;\; \forall t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces

$[f\circ g]$ es continua en $\mathbb{R}_{\geq -3}$ pues $\lim\limits_{x_0} \sqrt{x+3} = f\big(g(x_0)\big) = \sqrt{x_0+3} \;\forall x_0 \in \mathbb{R}_{\geq -3}$



Función continua

f es continua si es continua en todo su dominio.

$$y = x^3 + \sqrt{x-1}$$

Las funciones algebraicas son continuas.

$$y = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

Las funciones racionales son continuas.

Las funciones trigonométricas son continuas.

$$y = sen\,(2x+\pi)$$

Las funciones exponenciales son continuas.

$$y = e^{x^2+1}$$

Las funciones logarítmicas son continuas.

$$y = \ln(2x+1)$$

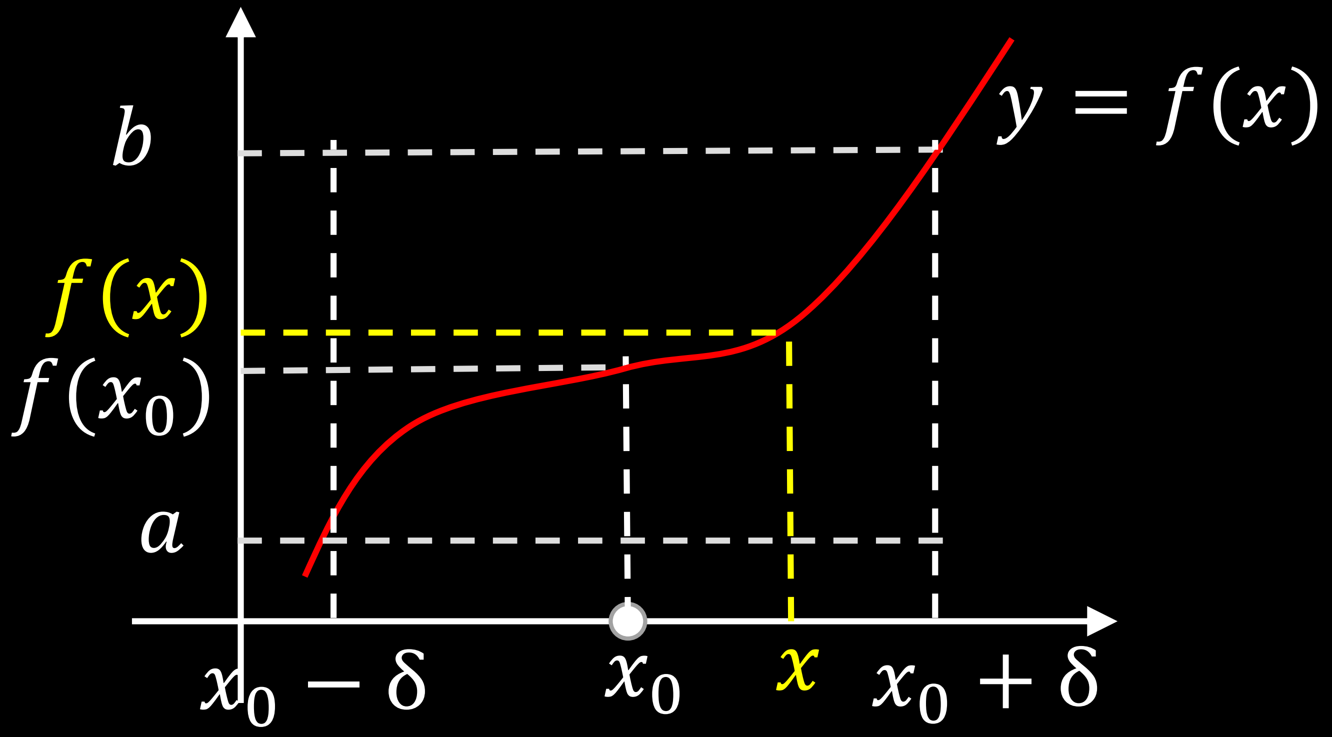
La composición de estas funciones
es continua por el teorema anterior.

$$y = \sqrt{\ln(2x+1)}$$

Teorema

Si f es continua en x_0 y $a < f(x_0) < b$;

entonces $\exists\ V_\delta(x_0) \quad / \qquad a < f(x) < b \quad \forall x \in V_\delta(x_0)$.



$\boldsymbol{a < f(x) < b}$

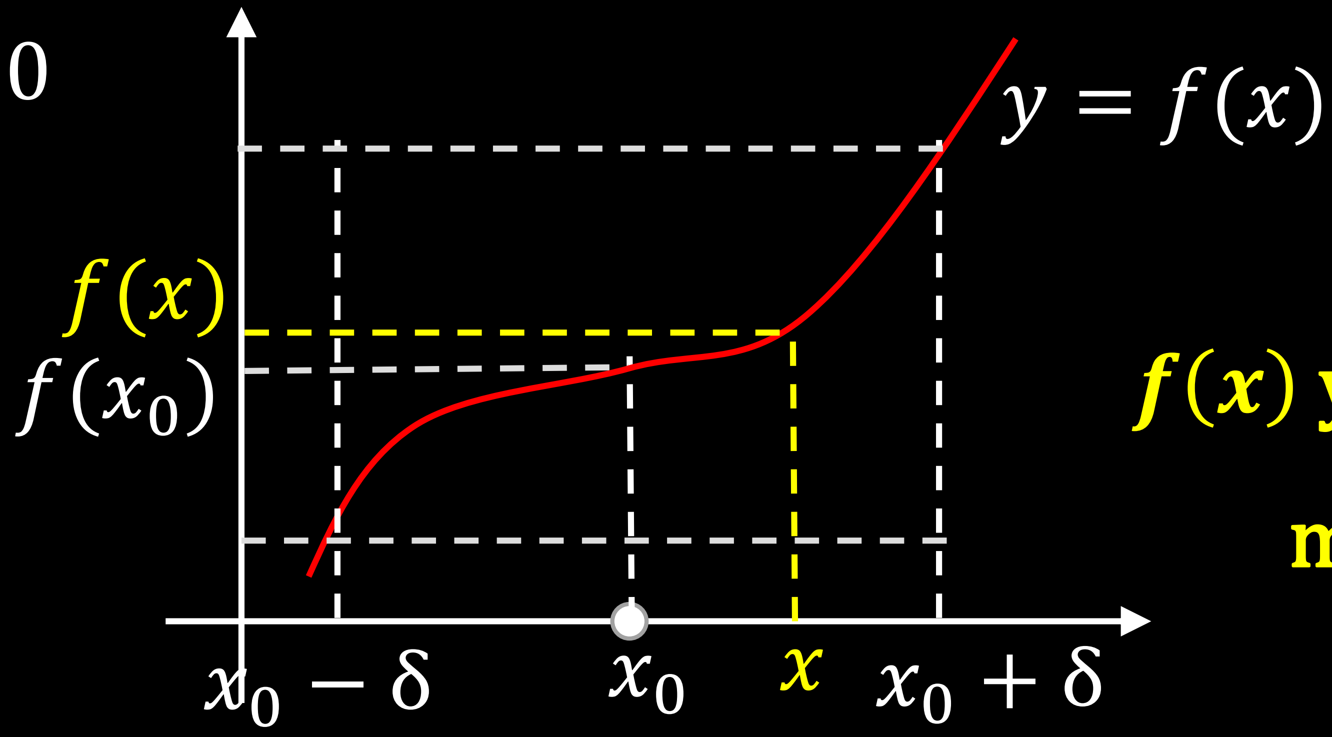
Corolario

Si f es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$,

entonces $\exists\ V_\delta(x_0)\ \ /\ \ \ f(x)\ y f(x_0)$

tienen el mismo signo $\forall x \in V_\delta(x_0)$.

Sea $f(x_0) > 0$



$f(x)$ y $f(x_0)$ tienen el mismo signo.

Función acotada. Supremo, ínfimo. Máximo, mínimo

Sea $A \subset \mathbb{R}$.

A es un **conjunto acotado superiormente** si $\exists\, c \in \mathbb{R} / x \leq c \quad \forall x \in A$.

c se llama **cota superior** de A.

A es un **conjunto acotado inferiormente** si $\exists\, c \in \mathbb{R} / x \geq c \quad \forall x \in A$.

c se llama **cota inferior** de A.

A es un **conjunto acotado** si A es superior e inferiormente acotado.

Sea $A \subset \mathbb{R}$, conjunto superiormente acotado.

S es **supremo** de A si S es la menor de las cotas superiores de A.

Sea $A \subset \mathbb{R}$, conjunto inferiormente acotado.

I es **ínfimo** de A si I es la mayor de las cotas inferiores de A.

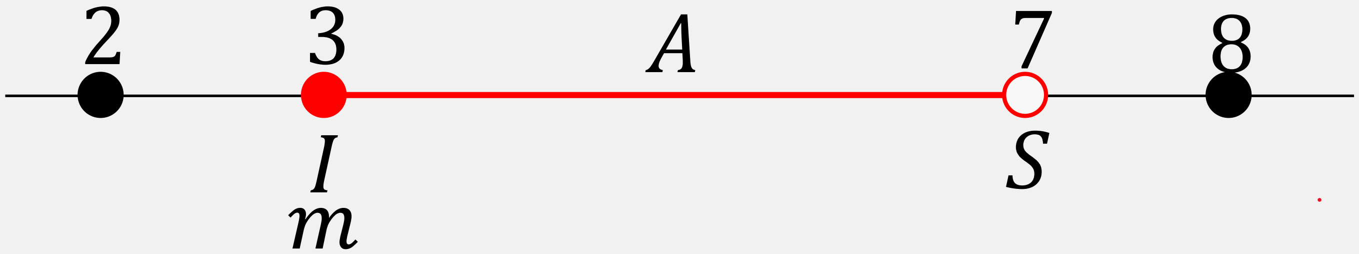
Sea $A \subset \mathbb{R}$, conjunto superiormente acotado.

M es **máximo** de A si M es supremo de A y $M \in A$.

Sea $A \subset \mathbb{R}$, conjunto inferiormente acotado.

m es **mínimo** de A si m es ínfimo de A y $m \in A$.

Ejemplo Sea $A=[3,7)$



A es superiormente acotado. 8 es cota superior (hay infinitas).

A es inferiormente acotado. 2 es cota inferior (hay infinitas).

A es acotado.

3 es ínfimo y es mínimo de A.

7 es supremo de A.

A no tiene máximo.

Sea $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$; $A \subset D_f$.

f es una **función acotada superiormente sobre A** si

$\exists\, c \in \mathbb{R} / f(x) \leq c \quad \forall x \in A$. c se llama **cota superior** de f sobre A.

f es una **función acotada inferiormente sobre A** si

$\exists\, c \in \mathbb{R} / f(x) \geq c \quad \forall x \in A$. c se llama **cota inferior** de f sobre A.

f es una **función acotada sobre A** si f es superior e inferiormente

acotada sobre A.

Sea $f\colon D_f \longrightarrow \mathbb{R}$. $A \subset D_f$. f función superiormente acotada sobre A.

S es **supremo** de f sobre A si S es la menor de las cotas superiores de f sobre A.

M es **máximo** de f sobre A si M es supremo de f sobre A y $M = f(x)$ para algún $x \in A$.

Sea f función inferiormente acotada sobre A.

I es **ínfimo** de f sobre A si I es la mayor de las cotas inferiores de f sobre A.

m es **mínimo** de f sobre A si m es ínfimo de f sobre A y $m = f(x)$ para algún $x \in A$.

Ejemplo Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}; y=e^{-x^2}$.

f es función superiormente acotada sobre $\mathbb{R}$.

3 es una cota superior de f sobre A (hay infinitas).

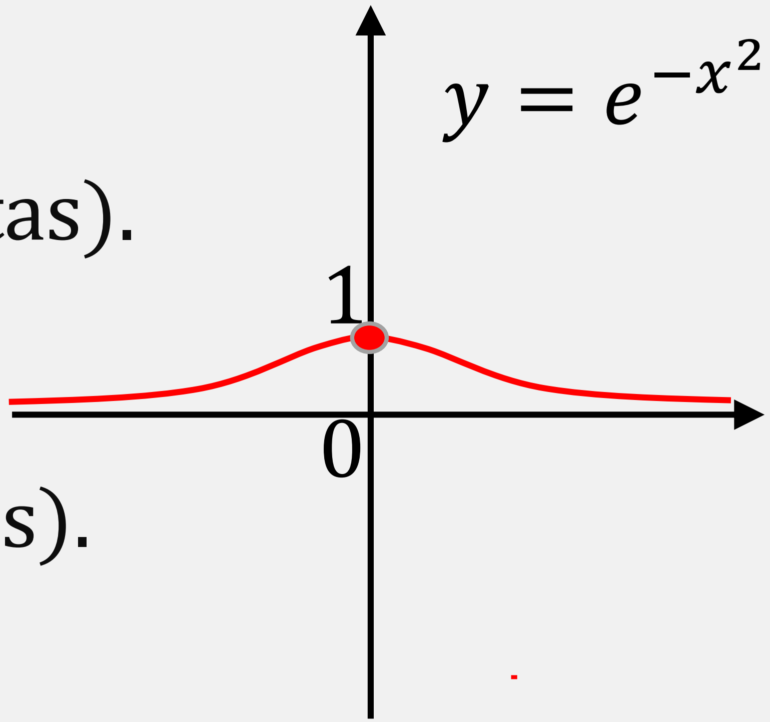
f es función inferiormente acotada sobre $\mathbb{R}$.

0 es una cota inferior de f sobre $\mathbb{R}$(hay infinitas).

f es función acotada sobre $\mathbb{R}$.

1 es supremo y máximo de f sobre $\mathbb{R}$.

0 es ínfimo de f sobre $\mathbb{R}$. f no tiene mínimo sobre A.

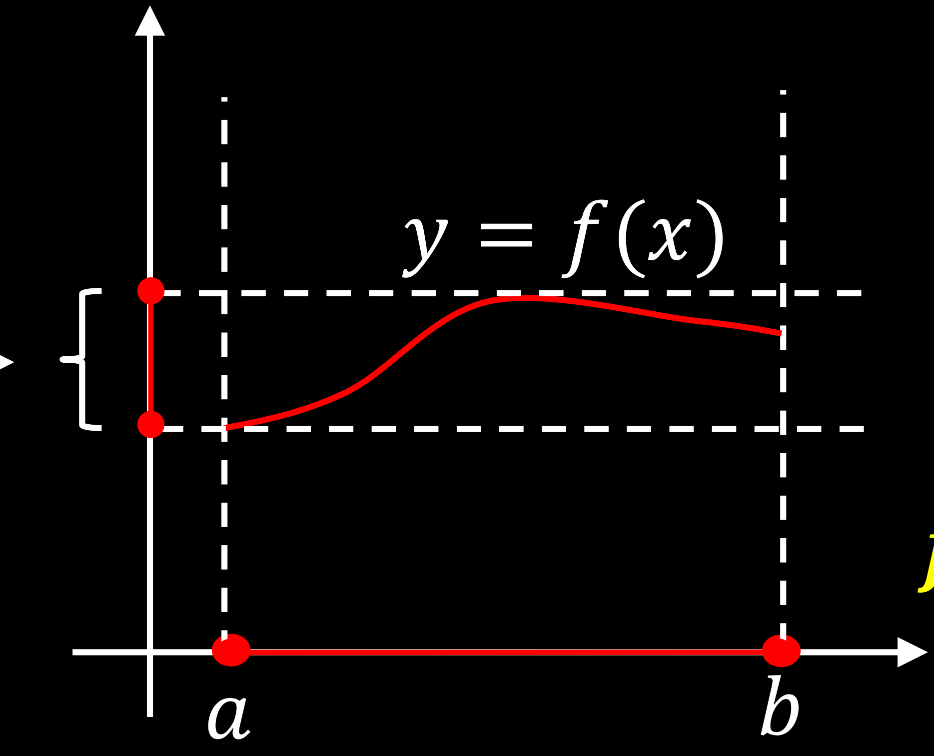


Teoremas sobre funciones continuas

Teorema

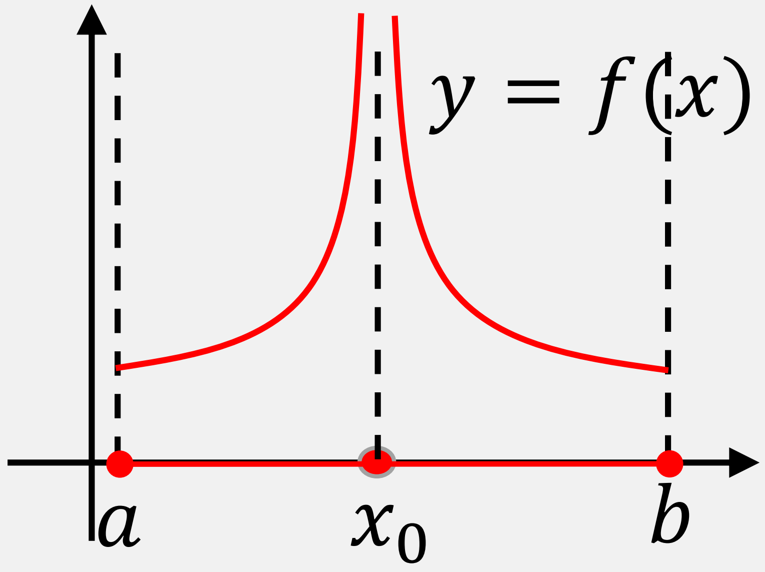
Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f es acotada sobre $[a, b]$.

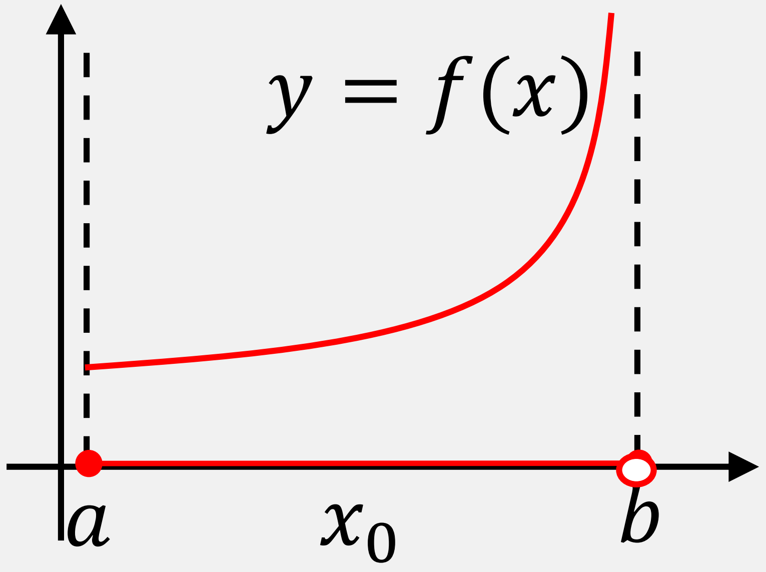
Conjunto de valores que toma la función. Es un conjunto acotado.



f acotada sobre $[a, b]$

Ejemplo Si una función no es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, no se puede garantizar que la función sea acotada.





f no es continua sobre $[a, b]$

f no es acotada sobre $[a, b]$

f es continua sobre un intervalo no cerrado $[a, b)$

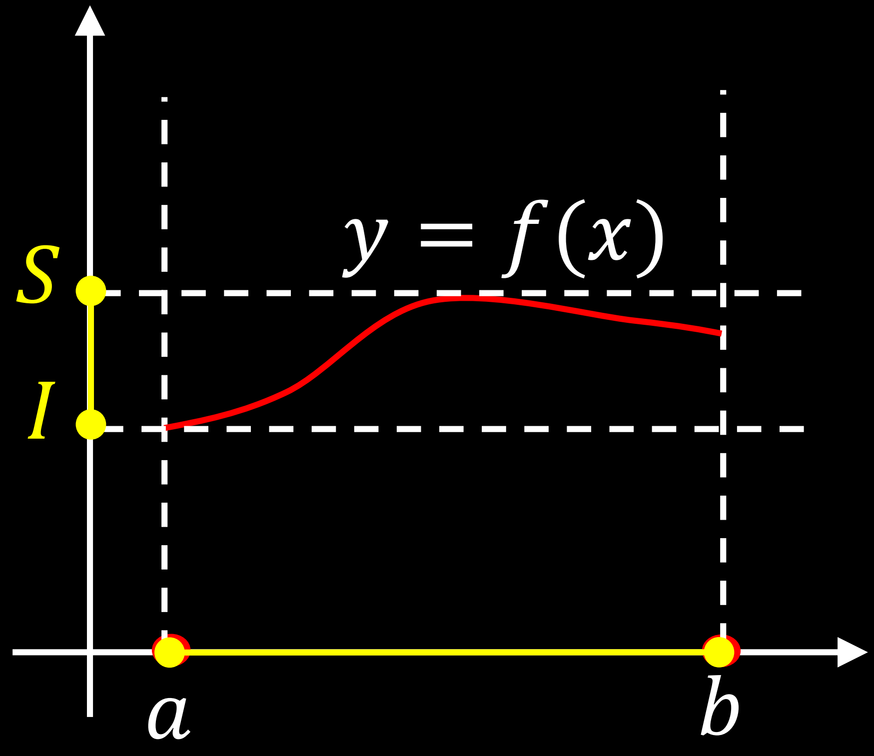
f no es acotada sobre $[a, b)$

Teorema

Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f tiene supremo e ínfimo sobre $[a, b]$.

Supremo de f sobre $[a, b]$

Ínfimo de f sobre $[a, b]$



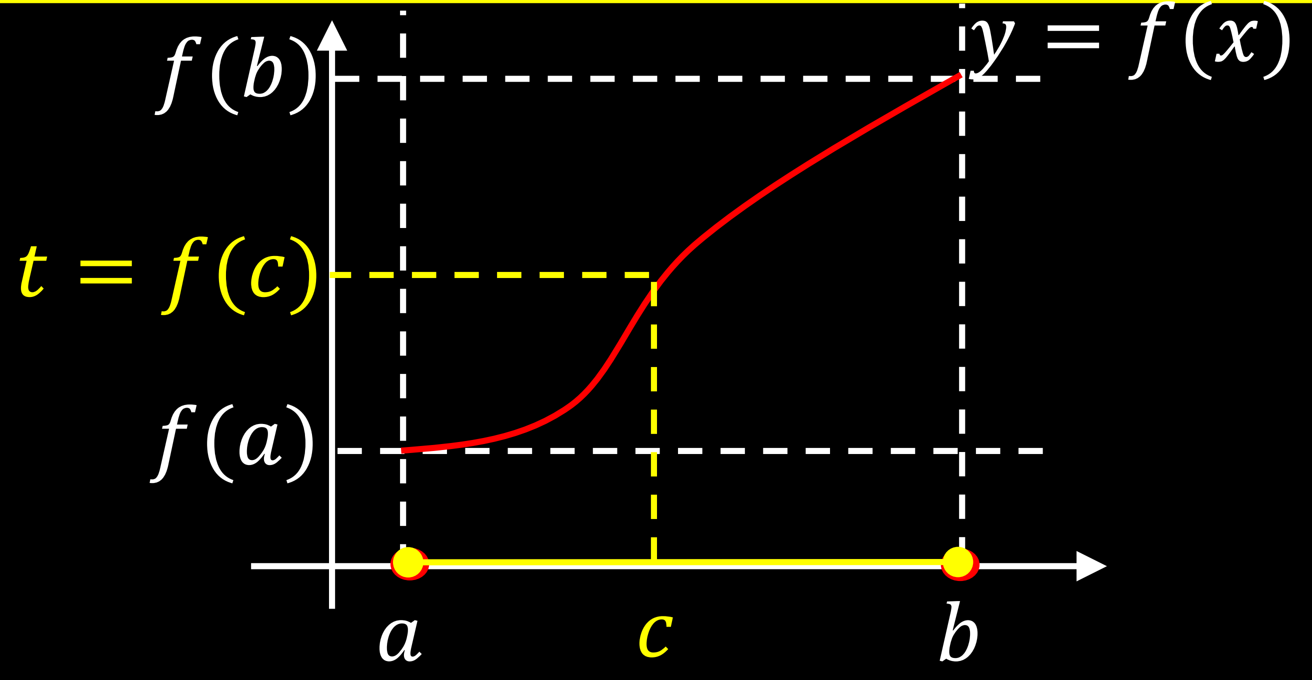
f tiene supremo e ínfimo sobre $[a, b]$

Teorema del valor intermedio

Si f es continua sobre $[a, b]$, $f(a) < f(b)$

y $t \in \mathbb{R}$ / $f(a) < t < f(b)$, entonces

$\exists c \in (a, b)$ / $f(c) = t$.



$t = f(c)$

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = \ln x$.

Aplique el Teorema del valor intermedio a f en el intervalo $[1, e]$.

Asigne a t un valor que cumpla con la hipótesis del teorema.

1. Verificación del cumplimiento de las hipótesis.

   f es continua en $[1, e]$.

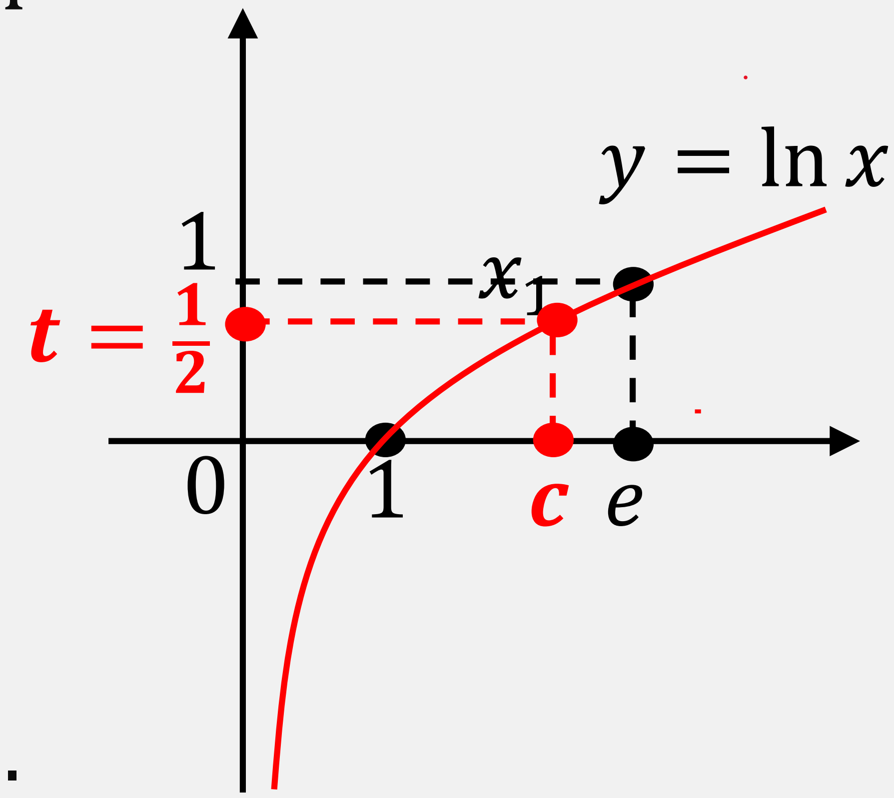
   $f(1) = 0; f(e) = 1;$ $f(1) < f(e)$.

2. Comprobamos la validez del teorema:

   Sea $t = {}^{1}/_{2}$; $f(1) < t < f(e)$.

   $t = f(c)$: $\frac{1}{2} = \ln c \Longrightarrow$ $e^{\frac{1}{2}} = c$.

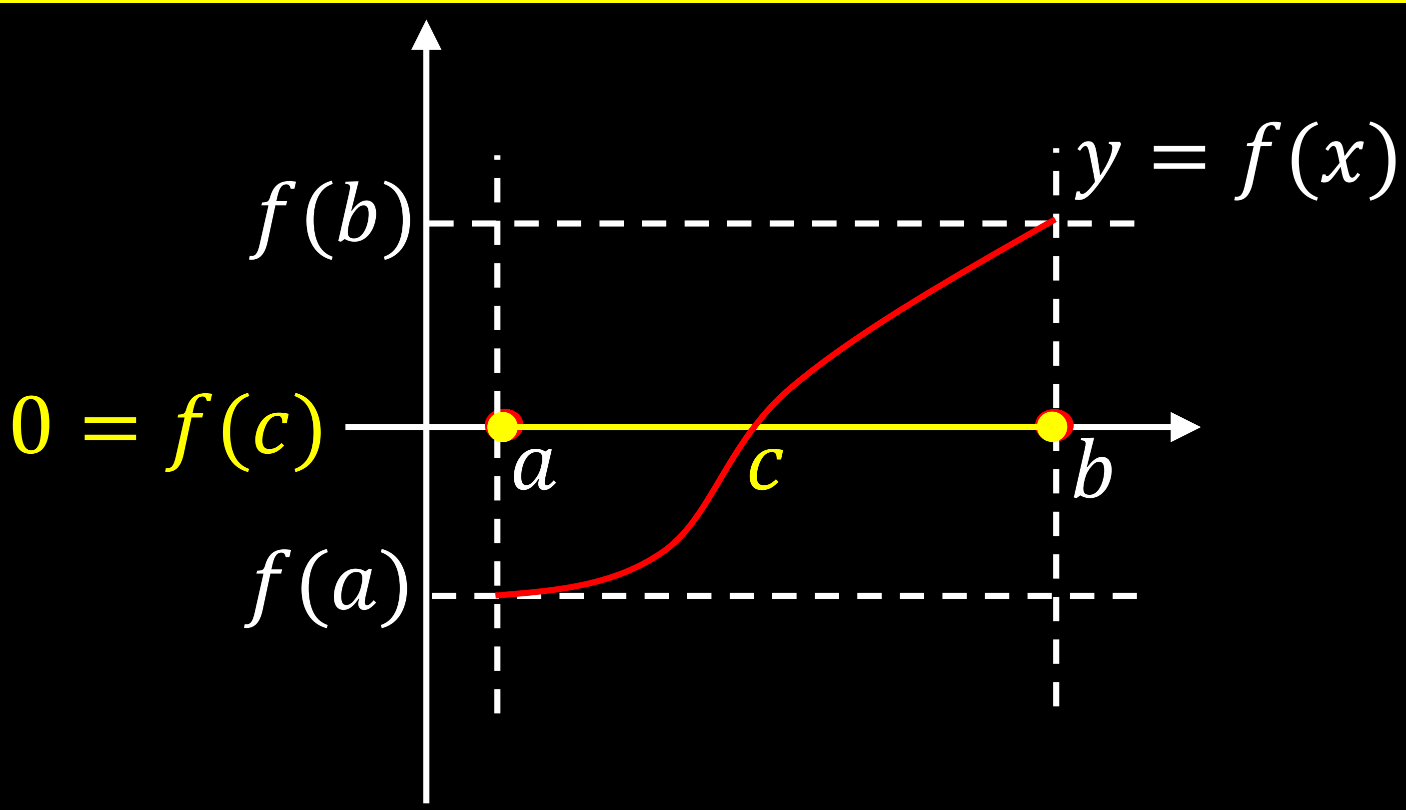
   Se cumple: $1 < \sqrt{e} < e \Longrightarrow$ $c \in (1, e)$.



Teorema de Bolzano

Si f es continua sobre $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos ,

entonces $\exists c \in (a,b) \quad / \quad f(c)=0.$



$\mathbf{0 = f(c)}$

Ejemplo Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Dado que no se puede aplicar ningún caso de factoreo, aplicaremos el Teorema de Bolzano para hallar una raíz. Sea c: raíz de f.

$f(0) = -2\,; f(4) = 14 \implies c\epsilon(-2,4)$

Sea $x_1 \in (0,4)$. Si $f(x_1) < 0, c \in (x_1, 4)$.

Si $f(x_1) > 0, c \in (0, x_1)$.

$f(2) = -6 \implies c\epsilon(2,4)$

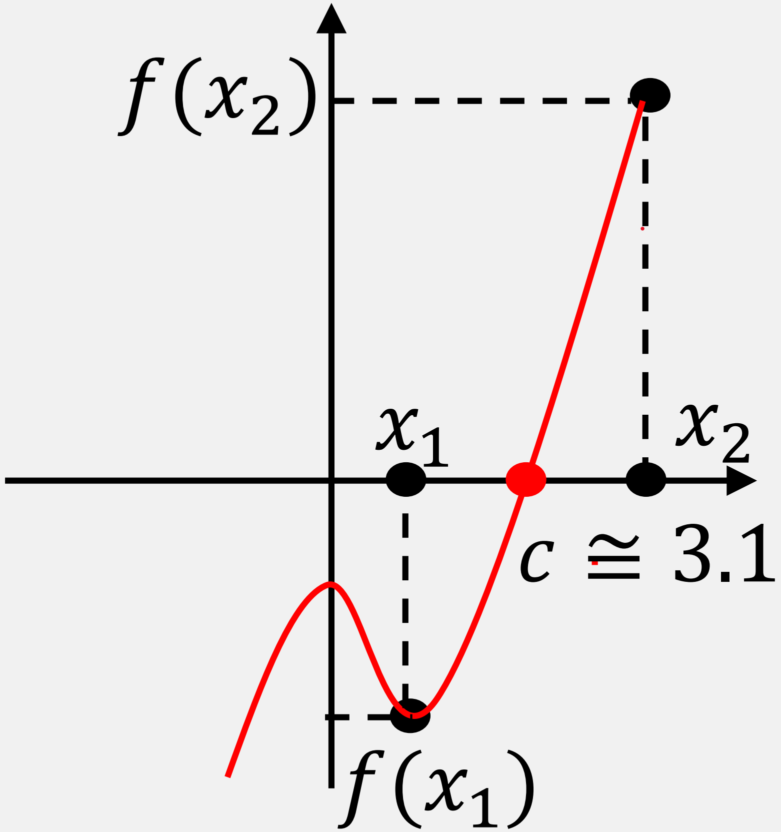
$f(3) = -2 \implies c\epsilon(3,4)$

$f(3.5) = 4.125 \implies c\epsilon(3, 3.5)$

$f(3.3) = 2.267 \implies c\epsilon(3, 3.3)$

$f(3.1) = -1.039 \implies c\epsilon(3.1,3.3)$

$f(3.2) = 0.048 \implies c\epsilon(3,1; 3,2)$; lo que significa que $c \cong 3,1$



Teorema de Bolzano-Weierstrass

Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces f tiene máximo y mínimo sobre $[a, b]$.