PRÁCTICO 12: LÍMITES

EJERCICIOS DE LÍMITES RESUELTOS

Calcule los siguientes límites

1. $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \frac{x+2\operatorname{sen} x}{3x}$

Lo primero que se debe hacer es reemplazar x por el número al cual tiende x, en este caso $\frac{\pi}{2}$. Hacemos las operaciones indicadas y, si no se anula el denominador, el resultado obtenido es el límite que se quería calcular.

$$\lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{x + 2\operatorname{sen} x}{3x} = \lim_{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi + 4}{3\pi}$$

2. $\lim\limits_{1} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

En este caso hacemos lo mismo que en el caso anterior, pero como la regla de asignación cambia en $x_0 = 1$, se deben calcular ambos límites laterales. Es posible que los límites laterales sean distintos. Si así ocurriera, el límite en $x_0 = 1$ no existiría.

$$\lim_{1^-} x^2 + 1 = \lim_{1^-} 1^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{1^+} 2x + 3 = \lim_{1^+} 2.1 + 3 = 5$$

Dado que los límites laterales son distintos, el límite no existe.

3. $\lim\limits_{0} \frac{3x^2+x}{x-1}$

Reemplazamos x por 0, hacemos las operaciones y, si no se anula el denominador, el resultado del límite es el resultado obtenido.

$$\lim_{0} \frac{3x^2 + x}{x - 1} = \lim_{0} \frac{3.0 + 0}{0 - 1} = 0$$

4. $\lim\limits_{1} \frac{\ln(x+1)}{x-1}$

Al reemplazar x por 1 advertimos que se anula el denominador mientras que el numerador no se anula. Este límite no existe pues la división por 0 no está definida. No obstante, haciendo una extensión del concepto de límite, puesto que el cociente crece ilimitadamente, en valor absoluto, cuando el denominador tiende a 0, se dirá que el límite es $+\infty$ o $-\infty$,. Para determinar el signo $+$ o – calcularemos los límites laterales aplicando la regla de los signos de la división y de la multiplicación.

Lo primero que deberemos hacer es factorear el numerador y el denominador. Esto significa que en el numerador y en el denominador tenemos solamente multiplicaciones de factores en los cuales no se puede aplicar ningún caso de factoreo, se dice que los factores son irreductibles. Cada factor puede incluir sumas y restas. En este caso, en el numerador tenemos el factor $\ln(x+1)$ y en el denominador el factor $(x-1)$. Con estos factores hacemos una tablita de la siguiente manera:

Sobre una recta (la recta real) marcamos todas las raíces del numerador y todas las raíces del denominador. La raíz de $\ln(x+1)$ es el número 0 pues el logaritmo se anula cuando el argumento, en este caso $(x+1)$, se hace igual a 1. La raíz del denominador es el número 1. Al marcar las raíces, la recta real quedó dividida en intervalos. Nuestro objetivo final es determinar el signo que toma la función completa en cada intervalo. En una columna a la izquierda de la recta dibujada anteriormente, escribimos, uno por uno, todos los factores y al final de la columna, la función completa. El paso siguiente es escribir el signo de cada factor en cada intervalo. Por ejemplo, el factor $(x+1)$ es – en todos los intervalos a la izquierda de -1 y es $+$ en todos los intervalos a la derecha de -1. Siempre a la izquierda de la raíz, los factores de la forma $(x \pm a)$ serán – y a la derecha serán $+$. Finalmente, en cada intervalo aplicamos la regla de los signos: $+.+=+$; $+.-=-$; $-.+=-$; $-.-=+$. En definitiva, cada vez que en un intervalo tengamos una cantidad par de signos $-$, el resultado será $+$; y cada vez que en un intervalo se tenga una cantidad impar de signos $-$, el resultado será $-$.

Volvamos a nuestro ejercicio:

	0	1	
$\ln(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
$\frac{\ln(x+1}{(x-1)}$	$+$	$-$	$+$

Como a la izquierda de 1, el signo de la función es – y a la derecha es $+$; entonces el límite izquierdo es $-\infty$ y el límite derecho es $+\infty$.

$\lim\limits_{1^-} \frac{\ln(x+1)}{x-1} = -\infty$ $\lim\limits_{1^+} \frac{\ln(x+1)}{x-1} = \infty$ El límite no existe.

5. $\lim\limits_{2} \frac{x^2+x}{x^2+x-6}$

Al reemplazar x por 2 observamos que se anula solamente el denominador. Entonces factoreamos el denominador y el numerador y construimos la tablita de los signos.

$$\lim_{2} \frac{x^2+x}{x^2+x-6} = \lim_{2} \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+3)}$$

	-3	-1	0	2	
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x+1)}{(x-2)(x+3)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

A la izquierda de 2 el signo es – y a la derecha es $+$, por tanto

$$\lim_{2^-} \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+3)} = -\infty \qquad \lim_{2^+} \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \infty$$

6. $\lim\limits_{1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$ Reemplazamos x por 1 y advertimos que se anula el denominador únicamente, por tanto, el resultado es $\pm\infty$. Deberemos determinar el signo de los límites laterales construyendo la tablita.

Primero factoreamos el numerador: despejamos x y obtenemos $x = -1$.

Dividimos el numerador por $(x+1)$ aplicando la Regla de Ruffini y obtenemos el cociente x^2-x+1. Este cociente no tiene raíces reales, por lo que no se puede factorear (es irreductible).

El denominador ya está factoreado. Hasta este momento la expresión es así:

$\lim\limits_{1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$ Con esta última expresión construimos la tablita. El factor x^2-x+1 no tiene raíces reales. En todos los intervalos el signo de x^2-x+1 es $+$ pues se trata de una parábola que no tiene raíces reales (no corta al eje x) y tiene las ramas hacia arriba (el coeficiente principal es mayor que 0), por consiguiente, para todo valor de x, el valor de y es mayor que 0. En consecuencia, el signo es $+$ en todos los intervalos.

El factor $(x-1)^2$ es $+$ en todos los intervalos pues es un cuadrado.

	-1	1	
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
(x^2-x+1)	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$	$-$	$+$	$+$

En definitiva, de la tablita surge que ambos límites laterales son iguales.

$$\lim_{1^-}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=\infty \qquad \lim_{1^+}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=\infty$$

7. $\lim\limits_{0} -\frac{x(x+1)}{3x^2}$ Reemplazando x por 0 se anulan el numerador y el denominador. Es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Siendo el cociente de dos polinomios deberemos factorear y simplificar y luego construir la tablita.

La expresión ya está factoreada, solamente hay que simplificar.

$$\lim_{0} -\frac{x(x+1)}{3x^2}=\lim_{0} -\frac{x+1}{3x}$$

	-1	0	
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$-\dfrac{x+1}{3x}$	$-$	$+$	$-$

En esta tabla se debe tener en cuenta que el signo – de la función completa (la última fila de la tabla) afecta el signo de la función en cada intervalo, lo cambia. Así, por ejemplo, en la primera columna tenemos dos signos – (una cantidad par) y el signo – de la función. El signo final resulta $-$, en ese intervalo.

$$\lim_{0^-} -\frac{x+1}{3x}=\infty \qquad \lim_{0^+} -\frac{x+1}{3x}=-\infty$$

8. $\lim\limits_{1} \frac{2x-2}{3x^2+3x-6}$

Reemplazamos x por 1 y observamos que se anulan el numerador y el denominador. Cuando esto ocurre se tiene una forma indeterminada del tipo $0/0$.

Hay otras formas indeterminadas. En todos los casos se trata de límites. Las formas indeterminadas son de los siguientes tipos: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty, 0.\infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$. Más adelante veremos la Regla de L`Hopital que nos permitirá resolver todas las formas indeterminadas. Por el momento solo resolveremos algunos casos de formas indeterminadas.

Volviendo al ejercicio, que es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$, y tratándose del cociente de dos polinomios, el método de resolución consiste en factorear y simplificar. Luego de simplificar se vuelve a calcular el límite.

$$\lim_{1} \frac{2x-2}{3x^2+3x-6} = \lim_{1} \frac{2(x-1)}{3(x-1)(x+2)} = \lim_{1} \frac{2}{3(x+2)} = \frac{2}{3(1+2)} = \frac{2}{9}$$

9. $\lim\limits_{1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Reemplazamos x por 1 y observamos que se anulan el numerador y el denominador. Se tiene, entonces, una forma indeterminada del tipo 0/0. En este caso no se tiene el cociente de dos polinomios, por tanto, utilizaremos otro procedimiento en lugar de factorear y simplificar. Lo que haremos es multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión que tiene el radical.

$$\lim_{1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{1} \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

Aplicando uno de los casos de factoreo, más precisamente el producto de la suma por la diferencia de dos números, reemplazamos este producto por la diferencia de los cuadrados de dichos números.

$$\lim_{1} \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{1} \frac{(x+3)-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{1} \frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

Simplificamos y volvemos a calcular el límite.

$$\lim_{1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

10. $\lim\limits_{0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+4}-2}$

Reemplazando x por 0, nos damos cuenta de que se anulan el numerador y el denominador. Es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Como se tiene una expresión con radicales, se debe multiplicar y dividir por los conjugados.

$$\lim_{0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{0}\frac{(x+9-9)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(x+4-4)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{0}\frac{\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\frac{2}{3}$$

11. $\lim\limits_{\infty}\frac{3x^2+x-2}{2x^3-x+6}$

Cuando x tiende a ∞ o $-\infty$ y se tiene el límite del cociente de dos polinomios, resulta una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Siempre que se tenga un polinomio y x tiende a $\pm\infty$ predomina el término de mayor grado, por lo que ignoramos los restantes términos. Con esta premisa el ejercicio queda así:

$$\lim_{\infty}\frac{3x^2}{2x^3}$$

Ahora simplificamos las x y volvemos a calcular el límite.

$$\lim_{\infty}\frac{3}{2x}=0$$

El límite es 0 puesto que cualquier número dividido ∞ es 0.

En los siguientes tres ejercicios aplicamos el mismo procedimiento empleado en el ejercicio 8 pues son límites del cociente de dos polinomios para x que tiende a infinito (o menos infinito).

12. $\lim\limits_{-\infty}\frac{3x^3+x^2-2}{2x^3-x+6}=\lim\limits_{-\infty}\frac{3x^3}{2x^3}=\lim\limits_{-\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

13. $\lim\limits_{-\infty}\frac{3x^3+x^2-2}{2x^4-x+6}=\lim\limits_{-\infty}\frac{3x^3}{2x^4}=\lim\limits_{-\infty}\frac{3}{2x}=0$

14. $\lim\limits_{-\infty}\frac{3x^3-2x+1}{2x^2+x-4}=\lim\limits_{-\infty}\frac{3x}{2}=-\infty$

15. $\lim\limits_{\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

En este límite podemos introducir el numerador dentro de la raíz. Para no alterar la expresión original tenemos que elevar el numerador al cuadrado. Una vez que tenemos toda la expresión dentro de la raíz, calculamos el límite del radicando, un cociente de dos polinomios cuando x tiende a ∞. Obtenido el resultado, resolvemos la raíz.

$$\lim_{\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{\infty} \sqrt{\frac{4x^2}{1+x^2}} = \sqrt{\lim_{\infty} \frac{4x^2}{1+x^2}} = \sqrt{4} = 2$$

16. $\lim\limits_{0} \frac{sen\ x}{x} = 1$ esta es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Se puede demostrar que su resultado es 1.

Para que se cumpla este enunciado debe ser el ángulo igual al denominador. En los siguientes ejercicios trataremos de modificar el denominador, multiplicando y dividiendo por el mismo factor, para que el denominador sea igual al ángulo. El ángulo no se puede cambiar.

17. $\lim\limits_{0} \frac{sen\ 3x}{2x} = \lim\limits_{0} \frac{3}{2} \frac{sen\ 3x}{3x}$ hemos multiplicado y dividido por 3. Aplicando la propiedad conmutativa del producto de números reales, hemos escrito el 2 en otra fracción para que quede a la vista que se tiene el ángulo $(3x)$ igual al denominador $(3x)$.

$$\lim_{0} \frac{3}{2} \frac{sen\ 3x}{3x} = \frac{3}{2}.1 = \frac{3}{2}$$

18. $\lim\limits_{0} \frac{sen\ 2x}{x^2} = \lim\limits_{0} \frac{1}{x} \frac{sen\ 2x}{x}$ hemos desdoblado el factor x^2, ahora aplicamos el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior.

$\lim\limits_{0} \frac{1}{x} \frac{sen\ 2x}{x} = \lim\limits_{0} \frac{2}{x} \frac{sen\ 2x}{2x} = \lim\limits_{0} \frac{1}{x} 1 = \lim\limits_{0} \frac{1}{x}$ dado que en este último límite se anula solamente el denominador, su resultado es $\pm\infty$. Para determinar el signo hay que construir una tablita como la de los ejercicios 4 y 5. El resultado final es

$$\lim_{0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad\qquad \lim_{0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Los siguientes límites permiten resolver formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$ similares del mismo modo que los dos últimos ejercicios anteriores.

$$\lim_{0} \frac{x}{sen\ x} = 1\,; \quad \lim_{0} \frac{tg\ x}{x} = 1\,; \quad \lim_{0} \frac{x}{tg\ x} = 1; \quad \lim_{0} \frac{sen\ x}{tg\ x} = 1\,; \quad \lim_{0} \frac{tg\ x}{sen\ x} = 1$$

19. $\lim\limits_{0} \frac{sen\ 3x}{tg\ 2x}$ al igual que en los casos anteriores no se pueden modificar los ángulos. Podemos multiplicar y dividir por los mismos factores adecuadamente, de tal forma que nos queden los límites cuyo resultado sabemos que es 1.

$\lim\limits_{0} \frac{sen\ 3x}{tg\ 2x} = \lim\limits_{0} 3x \frac{sen\ 3x}{3x} \frac{1}{2x} \frac{2x}{tg\ 2x}$ simplificamos las x y reemplazamos las expresiones cuyos límites ya conocemos.

$$\lim_{0} 3x \frac{sen\ 3x}{3x} \frac{1}{2x} \frac{2x}{tg\ 2x} = \lim_{0} 3 \frac{sen\ 3x}{3x} \frac{1}{2} \frac{2x}{tg\ 2x} = 3.1.\frac{1}{2}.1 = \frac{3}{2}$$

20. $\lim\limits_{0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ este resultado se demostrará en Análisis Matemático I. Es una forma indeterminada del tipo 1^{∞}.

21. $\lim\limits_{0} (1+2x)^{\frac{3}{x}}$ Para que sea aplicable el resultado del ejercicio anterior deben ser iguales el segundo término del paréntesis (el término en x) y el denominador del exponente. Si no fueran iguales dichas expresiones, se puede multiplicar y dividir el exponente por el mismo factor.

$\lim\limits_{0} (1+2x)^{\frac{2.3}{2x}} = \lim\limits_{0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}.6}$ Hemos multiplicado y dividido el exponente por 2. Ahora escribimos toda la expresión como una potencia de potencia, aplicando la propiedad que dice que si se tiene una potencia de potencia se multiplican los exponentes.

$\lim\limits_{0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}.6} = \lim\limits_{0} \left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{6}$ El límite de la expresión entre corchetes es el número e. De modo que el resultado final es

$$\lim_{0} \left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{6} = e^{6}$$

22. $\lim\limits_{\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ este resultado se demostrará en Análisis Matemático I. Para que se cumpla deben ser iguales el denominador del término en x (dentro del paréntesis) y el exponente.

23. $\lim_{\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}$ para no confundirnos, podemos escribir el signo – dentro de la fracción sin cambiar el resultado final.

$\lim_{\infty}\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{x}$ Ahora repetimos el procedimiento del ejercicio 17. Es decir, multiplicamos y dividimos el exponente por el mismo factor, de tal modo que coincidan el denominador del término en x dentro del paréntesis con el exponente. Luego escribimos la expresión completa como una potencia de potencia.

$$\lim_{\infty}\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{x}=\lim_{\infty}\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{x\frac{(-2)}{(-2)}}=\lim_{\infty}\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{-2x\frac{1}{(-2)}}=$$

$$=\lim_{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$