Práctico 13: Continuidad

EJERCICIOS DE CONTINUIDAD

Para hallar los puntos de discontinuidad de una función buscamos los puntos que anulan el denominador y los puntos donde cambia la definición de la función.

A continuación, veremos dos funciones. En la primera cambia la definición de la función y en la segunda se anula el denominador.

1) Dada la función $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$,

determine el valor de k para que la función sea continua en $x = 0$.

Solución

La definición de la función cambia en $x = 0$. Para que sea continua la función en $x = 0$ debe cumplirse:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Cálculo del límite de f en $x = 0$:

El límite por calcular es el límite del producto de dos funciones que es igual al producto de los límites:

$$\lim_{0} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{0} x^2 . \quad \lim_{0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

El primer límite se obtiene reemplazando x por 0, lo que da por resultado 0.

El segundo límite no existe, puesto que oscila entre -1 y 1; pero el valor de la función $sen\left(\frac{1}{x}\right)$, para cualquier x, está comprendido entre -1 y 1.

En definitiva, se tiene que producto $0.t$ con $t \in [-1,1]$.

El resultado es 0, cualquiera sea el valor de t.

Entonces

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Por otra parte

$$f(0) = \mathrm{k}$$

Entonces, para que f sea continua en $x = 0$ debe ser $k = 0$.

2) Sea la función $y = \frac{x^3+x^2+x}{x^2+x}$, hallar los puntos de discontinuidad y clasificarlos.

Solución

Los puntos de discontinuidad son los valores de x en los que se anula el denominador. Para hallar esos valores factoreamos el denominador.

$$y = \frac{x^3 + x^2 + x}{x(x+1)}$$

Las raíces del denominador son los números 0 y -1, por tanto, los puntos de discontinuidad de la función son 0 y -1. Además, estos puntos no pertenecen al dominio de la función.

Práctico 13: Continuidad

Para determinar si las discontinuidades son evitables o esenciales se deben calcular los límites en dichos puntos.

$$\lim_{0} \frac{x^3 + x^2 + x}{x(x+1)}$$

Al reemplazar ***x*** por ***0***, se observa que se anulan el numerador y el denominador. Se tiene entonces una forma indeterminada. Siendo el cociente de dos polinomios, se debe factorear y simplificar.

$$\lim_{0} \frac{x(x^2 + x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{0} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x+1)} = 1$$

Dado que el límite en $x = 0$ existe, la discontinuidad en $x = 0$ es evitable. Esto significa que el punto de coordenadas $(0,1)$ no pertenece al gráfico de la función pues $x = 0$ no pertenece al dominio. Pero la curva pasa por ese punto, sin incluirlo, porque la discontinuidad es evitable, lo que significa que bastaría agregar un punto al gráfico para eliminar la discontinuidad.

Ahora veamos el límite de la función en $x = -1$.

$$\lim_{-1} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x+1)}$$

Al reemplazar x por -1 se anula solamente el denominador. Es decir, el límite es $\pm\infty$. Independientemente del signo que tengan los límites laterales, el límite en $x = -1$ no existe, por lo que la discontinuidad es esencial y hay una asíntota vertical. No obstante, obtendremos los signos de los límites laterales en ese punto.

	-1	
$x^2 + x + 1$	+	+
$x + 1$	-	+
$\frac{(x^2 + x + 1)}{(x+1)}$	-	+

El numerador $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales, lo que significa que el gráfico de la función $y = x^2 + x + 1$ no corta al eje x, además es una parábola que está íntegramente sobre el eje x, puesto que su coeficiente principal es mayor que 0. En consecuencia, los valores de y son mayores que 0 para todo x.

Entonces

$$\lim_{-1^-} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{-1^+} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x+1)} = \infty$$

Como el límite en -1 no existe porque es infinito, la discontinuidad en $x = -1$ es esencial. Además, por ser el límite infinito, la recta $x = -1$ es asíntota vertical.