Material adicional 2: Guía de Estudio de Sistemas de Ecuaciones lineales

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Trataremos de resolver:

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Preguntas y actividades:

¿Qué es resolver un sistema?

¿Qué es una solución?

Para ello utilizaremos:

Método de eliminación.

¿Qué ventajas tiene el método de eliminación?

Para abreviar la notación:

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales: $AX = H$.

¿Cómo se llaman las matrices A, X y H?

Detalle los pasos a seguir para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Definición de matriz escalón reducida por filas.

Definición de sistema resolvente.

Para obtener la matriz escalón reducida por filas utilizamos:

Operaciones elementales de filas

Defina cada tipo de operación elemental de filas. Notación.

Para cada operación elemental de filas, e, existe una operación elemental de filas, e^{-1}, del mismo tipo, que restituye la matriz original.

Para cada tipo de operación elemental de filas, e, especifique su operación elemental inversa.

Definición: matrices equivalentes por filas.

Propiedades de la relación de equivalencia.

Demuestre las propiedades de la relación de equivalencia.

Enumere los pasos para obtener la matriz escalón reducida por filas de una matriz.

Material adicional 2: Guía de Estudio de Sistemas de Ecuaciones lineales

La validez del método empleado para resolver sistemas de ecuaciones lineales está dada por los siguientes dos teoremas.

Teorema: Si $[AH] \overset{f}{\sim} [A'H']$, entonces los sistemas $AX = H$ y $A'X = H'$ tienen las mismas soluciones.

Teorema: Toda matriz a elementos en un cuerpo es equivalente por filas a una única matriz escalón reducida por filas.

¿Es posible que dos alumnos obtengan distintos conjuntos solución al resolver un sistema de ecuaciones lineales? ¿Por qué?

Definición: rango de fila de una matriz.

Definiciones: Columna principal. Incógnita principal.

¿Qué relación hay entre $r(A)$ y la cantidad de incógnitas principales?

Ejemplifique sistemas con una única solución, con infinitas soluciones, e incompatible. Escriba la solución general como combinación lineal de n-uplas. Escriba una solución particular.

Definición: Sistema homogéneo.

¿Puede ser un sistema homogéneo incompatible?

¿Qué es la solución trivial?

Teorema de Rouché - Frobenius:
$AX = H$ tiene solución $\Leftrightarrow r(A) = r(AH)$.

Aplique el teorema a un sistema homogéneo.

Teorema: El sistema $AX = 0$, de m ecuaciones con n incógnitas, tiene otras soluciones además de la trivial si y solo si $r(A) < n$.

¿Se puede aplicar el teorema y su corolario a un sistema no homogéneo?

Corolario: El sistema $AX = 0$, con $m < n$, siempre admite otras soluciones además de la trivial.

Matrices

Definición: Suma de matrices.

Ejemplifique las propiedades de las operaciones suma, multiplicación por escalar y multiplicación de matrices.

Propiedades de la suma de matrices.

Definición: Producto por escalar.

Propiedades del producto por escalar.

Material adicional 2: Guía de Estudio de Sistemas de Ecuaciones lineales

Definición de combinación lineal de matrices.

Ejemplifique combinaciones lineales de columnas, de filas, de n-uplas.

Definición: Multiplicación de matrices.

Propiedades de la multiplicación de matrices.

Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

$AB = BA$

$AB = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $B = 0.$

$AB = AC \;\Rightarrow\; B = C$

$AI = A;\ IA = A$ con I matriz identidad (suponiendo que los productos están definidos).

Definición: Matriz elemental.

Teorema: $e(A) = EA$.

Teorema: $A \overset{f}{\sim} B \;\Leftrightarrow\; B = PA$, con P un producto de matrices elementales.

Definición: Matriz inversible.

Teorema: A es inversible $\Rightarrow$ A^{-1}es única. Demuéstrelo.

Teorema: A es inversible $\Rightarrow$ $(A^{-1})^{-1} = A$

Teorema: A es inversible $\Rightarrow$ A es simplificable.

Demuestre con un ejemplo que una matriz que no es inversible no es simplificable.
¿Sería válido demostrar con un ejemplo que si A es inversible, entonces A es simplificable?

Teorema: Sean A, B inversibles.
Entonces AB es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Demuéstrelo.

Extienda el enunciado del teorema a un conjunto de n matrices inversibles.

Teorema: Sea E matriz elemental. E es inversible y su inversa es una matriz elemental.

f

Teorema: Los siguientes enunciados son equivalentes.

i) A es inversible.

ii) $A \overset{f}{\sim} I$.

iii) A es un producto de matrices elementales.

Teorema: Los siguientes enunciados son equivalentes.

i) A es inversible.

ii) $A\,X = 0$ tiene única solución. Demuestre i⇒ii.

iii) $A\,X = H$ tiene única solución para cada matriz $H \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

Obtención de la inversa.

Enumere los pasos para determinar si una matriz es inversible y para hallar su inversa.