Cuestiones generales sobre balances

$$\begin{bmatrix}\text{Acumulación}\\ \text{de la propiedad X}\\ \text{dentro de las fronteras}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Generación}\\ \text{de la propiedad X}\\ \text{dentro de las fronteras}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Consumo}\\ \text{de la propiedad X}\\ \text{dentro de las fronteras}\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix}\text{Entrada}\\ \text{de la propiedad X}\\ \text{a través de las fronteras}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Salida}\\ \text{de la propiedad X}\\ \text{a través de las fronteras}\end{bmatrix}$$

Balance general de masa

$$\begin{bmatrix}\text{Acumulación}\\ \text{de la masa}\\ \text{dentro de las fronteras}\end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix}\text{Generación}\\ \text{de masa}\\ \text{dentro de las fronteras}\end{bmatrix}} - \cancel{\begin{bmatrix}\text{Consumo}\\ \text{de masa}\\ \text{dentro de las fronteras}\end{bmatrix}}$$

$$+ \begin{bmatrix}\text{Entrada de masa}\\ \text{a través de las fronteras}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Salida de masa}\\ \text{a través de las fronteras}\end{bmatrix}$$

$$\frac{dM}{dt} = \dot{M}_{ent1} + \dot{M}_{ent2} + \dot{M}_{ent3} - \dot{M}_{sal1} - \dot{M}_{sal2} = \sum_{i=1}^{N} \dot{M}_i$$

Balance general de masa

Table 2.2-1 The Mass Conservation Equation

	Mass Basis	Molar Basis
Rate-of-change form of the mass balance		
General equation	$\frac{dM}{dt} = \sum_{k=1}^{K} \dot{M}_k$	$\frac{dN}{dt} = \sum_{k=1}^{K} \dot{N}_k$
Special case:		
Closed system	$\frac{dM}{dt} = 0$ $M = \text{constant}$	$\frac{dN}{dt} = 0$ $N = \text{constant}$
*Difference form of the mass balance**		
General equation	$M_2 - M_1 = \sum_{k=1}^{K} \Delta M_k$	$N_2 - N_1 = \sum_{k=1}^{K} \Delta N_k$
Special cases:		
Closed system	$M_2 = M_1$	$N_2 = N_1$
Steady flow	$M_2 - M_1 = \sum_{k=1}^{K} \dot{M}_k \Delta t$	$N_2 - N_1 = \sum_{k=1}^{K} \dot{N}_k \Delta t$

Balance general de energía

$$\begin{bmatrix} \text{Acumulación} \\ \text{de energía} \\ \text{dentro de las fronteras} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Generación} \\ \text{de energía} \\ \text{dentro de las fronteras} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Consumo} \\ \text{de energía} \\ \text{dentro de las fronteras} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Entrada de energía} \\ \text{a través de las fronteras} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Salida de energía} \\ \text{a través de las fronteras} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left[U + M\left(\frac{v^2}{2} + gh\right)\right] = \sum_{i=1}^{N} \dot{M}_i\left(\hat{U} + \frac{v^2}{2} + gh\right)_i + \dot{Q} + \dot{W}_{eje} - P\frac{dV}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \dot{M}_i\left(P\hat{V}\right)_i$$

Balance general de energía

$$\frac{d}{dt}\left[U + M\left(\frac{v^2}{2} + gh\right)\right] = \sum_{i=1}^{N} \dot{M}_i\left(\hat{U} + \frac{v^2}{2} + gh\right)_i + \dot{Q} + \dot{W}_{eje} - P\frac{dV}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \dot{M}_i\left(P\hat{V}\right)_i$$

Si definimos una nueva función de estado, la **entalpía**, podemos recombinar:

$H = U + PV$

$$\frac{d}{dt}\left[U + M\left(\frac{v^2}{2} + gh\right)\right] = \sum_{i=1}^{N} \dot{M}_i\left(\hat{H} + \frac{v^2}{2} + gh\right)_i + \dot{Q} + \dot{W}_{eje} - P\frac{dV}{dt}$$

Balance general de energía

En general, los cambios de energía cinética y potencial, en los casos analizados en la materia, son despreciables:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dot{M}_i \widehat{H}_i + \dot{Q} + \dot{W}_{eje} - P\frac{dV}{dt}$$

$$\dot{M} = \frac{dM}{dt}$$

En base molar:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dot{N}_i \overline{H}_i + \dot{Q} + \dot{W}_{eje} - P\frac{dV}{dt}$$

Balance general de energía

Finalmente, para un sistema cerrado tenemos

$$\boxed{U_2 - U_1 = \dot{Q} + \dot{W}_{eje} - P\frac{dV}{dt}}$$

Y para un sistema abierto en estado estacionario pero sin cambios de energía potencial ni cinética:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{N}_i \overline{H}_i = \dot{Q} + \dot{W}_{eje} - P\frac{dV}{dt}$$

Balance general de energía

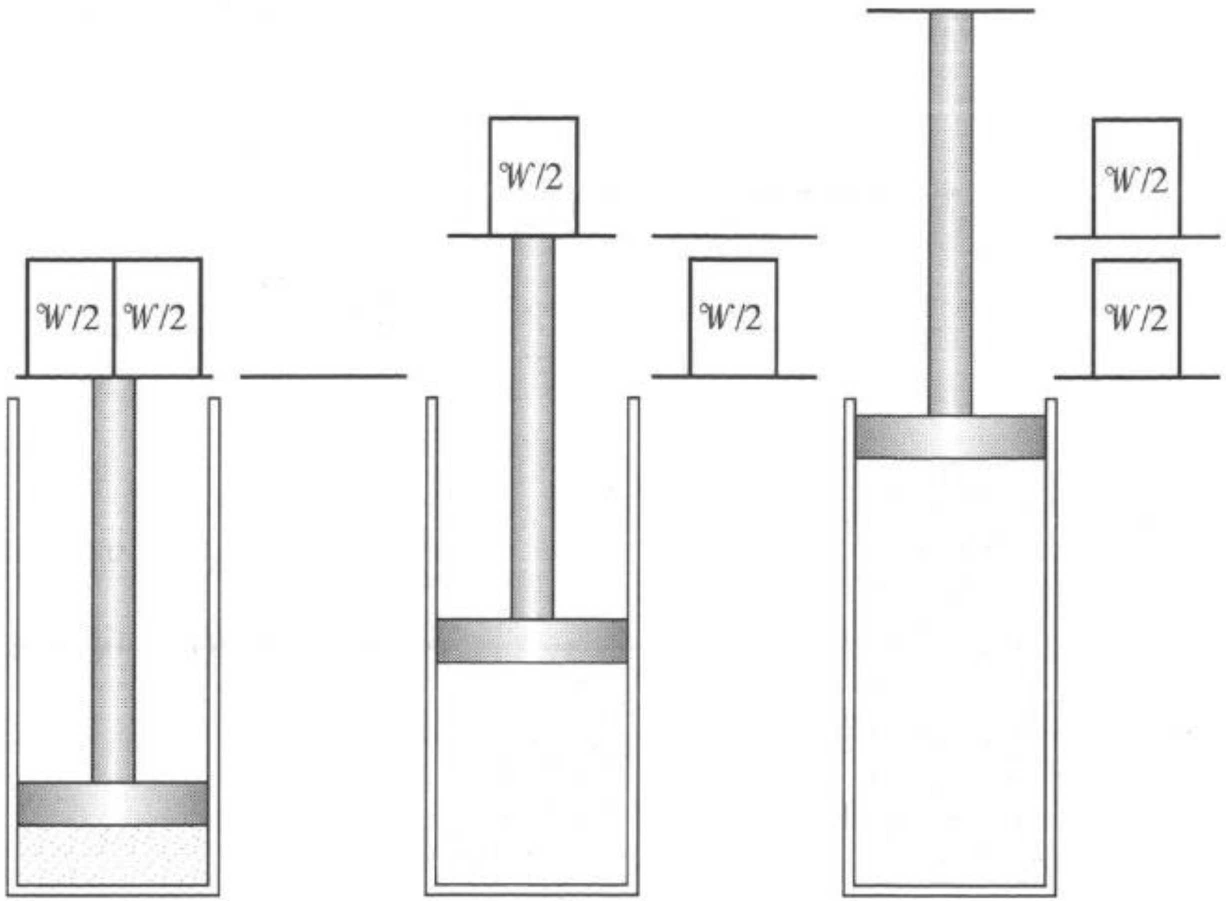
En definitiva, en el formato que usaremos los balances:

$$\boxed{\frac{d(mU)_{vc}}{dt} + \Delta\left[\dot{m}\left(H + \frac{1}{2}v^2 + gh\right)\right] = \dot{Q} + \dot{W}_{eje} - P\frac{dV}{dt}}$$

Y para un sistema en estado estacionario:

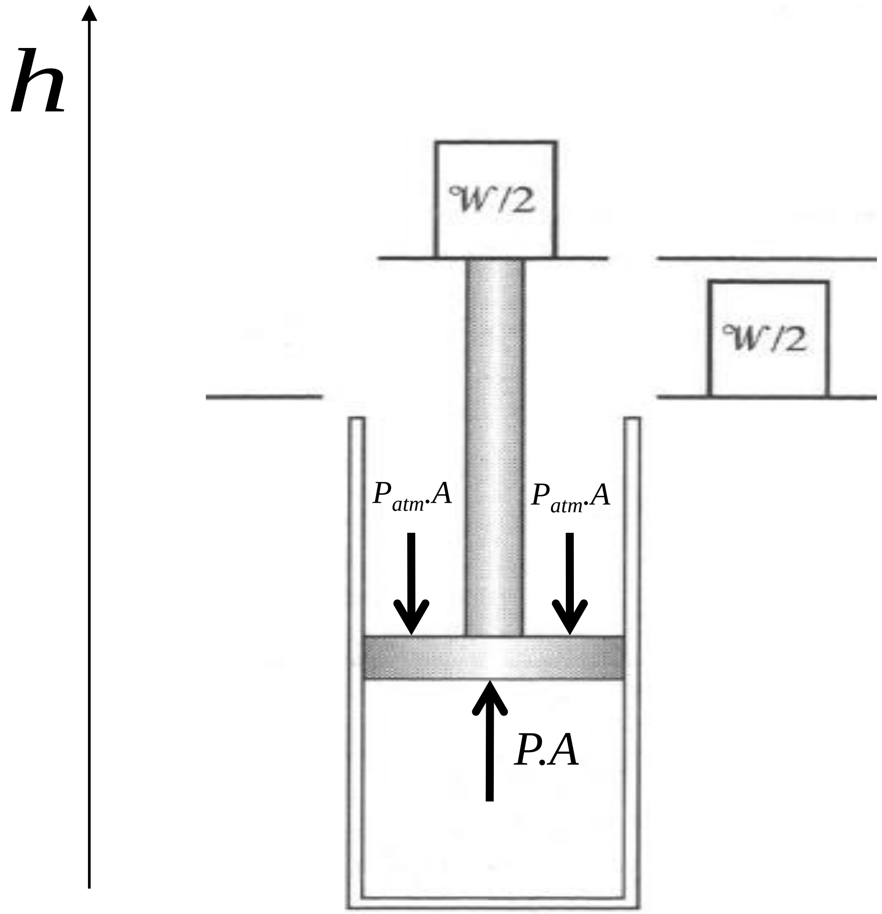
$$\boxed{\Delta\left[\dot{m}\left(H + \frac{1}{2}v^2 + gh\right)\right] = \dot{Q} + \dot{W}_{eje} - P\frac{dV}{dt}}$$

Expansión de un gas por remoción de pesas en un sistema Cilindro-Pistón



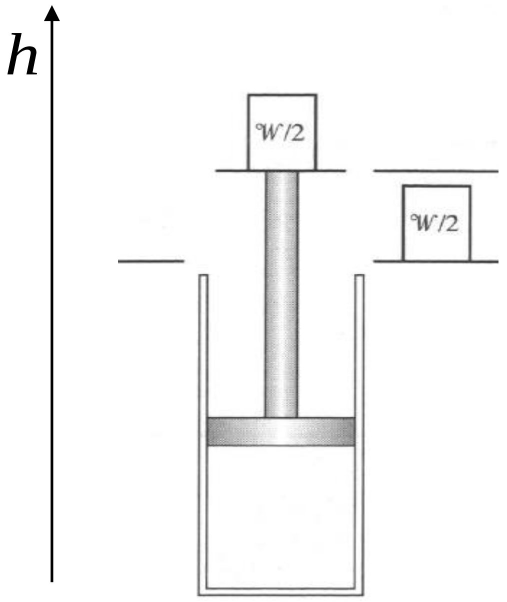
Balance de fuerzas

$$\underbrace{P\cdot A}_{\text{Fuerza P interna}} - \underbrace{P_{atm}\cdot A}_{\text{Fuerza } P_{atm}} - \underbrace{\left(W+\omega\right)\cdot g}_{\text{Peso}} + \underbrace{F_{fr}}_{\text{Fricción}} = \underbrace{\left(W+\omega\right)\frac{dv}{dt}}_{\text{Masa}\,\cdot\,\text{aceleración}}$$



Donde W es la masa de la pesa que se coloca sobre el pistón y ω es la masa del pistón.

$$P = P_{atm} - \frac{(W+\omega)}{A}\cdot g - \frac{F_{fr}}{A} + \frac{(W+\omega)}{A}\frac{dv}{dt}$$



Cuando el pistón se detiene, se alcanza el equilibrio, cesa el movimiento y no hay fuerza de fricción:

$$P = P_{atm} - \frac{(W+\omega)}{A}\cdot g$$

Para calcular el trabajo mecánico tendremos que:

$$\int PdV = \int\left[P_{atm} - \frac{(W+\omega)}{A}\cdot g - \frac{F_{fr}}{A} + \frac{(W+\omega)}{A}\frac{dv}{dt}\right]dV$$

Trabajo de expansión total hecho por el gas sobre los alrededores:

$$\int P dV = \left[P_{atm} - \frac{(W + \omega)}{A} \cdot g\right] \Delta V - \frac{1}{A} \int F_{fr}\, dV + \frac{(W + \omega)}{A} \int \frac{dv}{dt} dV$$

$$\int \frac{dv}{dt} dV = \Delta\left(\frac{1}{2} v^2\right)$$

Cambio de energía cinética

$$\frac{1}{A} \int F_{fr}\, dV = -k_{fr} \int v^2\, dt$$

Pérdida por fricción

Trabajo de expansión total hecho por el gas sobre los alrededores:

$$\int P dV = \left[P_{atm} - \frac{(W+\omega)}{A} \cdot g\right] \Delta V - \frac{1}{A} \int F_{fr}\, dV + \frac{(W+\omega)}{A} \int \frac{dv}{dt} dV$$

$$\cancel{\int \frac{dv}{dt} dV = \Delta\left(\frac{1}{2} v^2\right)}$$

Cambio de energía cinética

$$\cancel{\frac{1}{A} \int F_{fr}\, dV = -k_{fr} \int v^2\, dt}$$

Pérdida por fricción

Si la velocidad del pistón es nula, tanto en el estado inicial como el estado final y además no hay fricción:

$$\int PdV = P_{atm}\Delta V + (W + \omega)g\Delta h$$

El trabajo que realiza el gas se invierte exclusivamente en incrementar la energía potencial de pesas y pistón, y en vencer la Patm

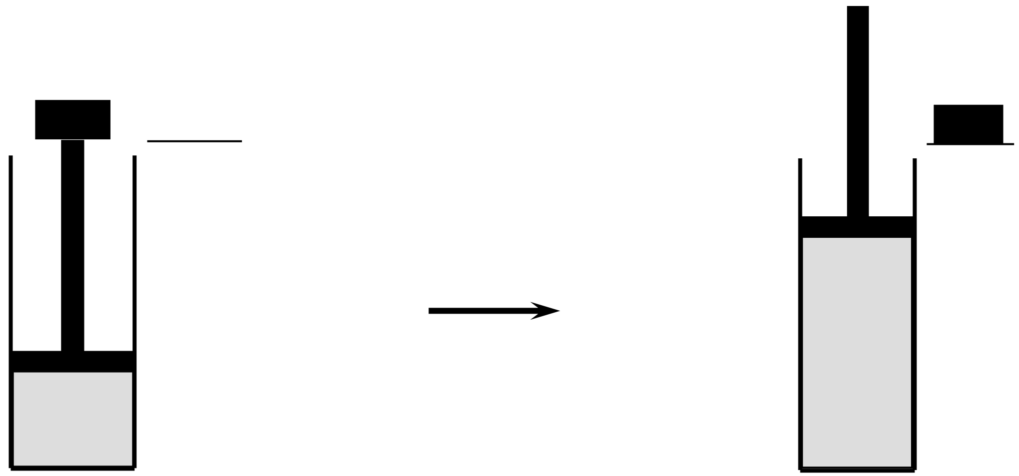
Procesos Reversibles e Irreversibles

Estudiamos proceso de expansión isotérmica a **297K**, de un mol de gas ideal contenido en un sistema cilindro-pistón

El pistón tiene:
un diámetro = **11 cm**
una masa = **5.3 kg**.

Las pesas tienen una masa total de **91.6 kg**.

En la condición final se han quitado todas las pesas ubicadas sobre el pistón



Procesos Reversibles e Irreversibles

Diámetro piston = 11 cm
masa piston = 5.3 kg.
Masa total pesas = 91.6 kg.

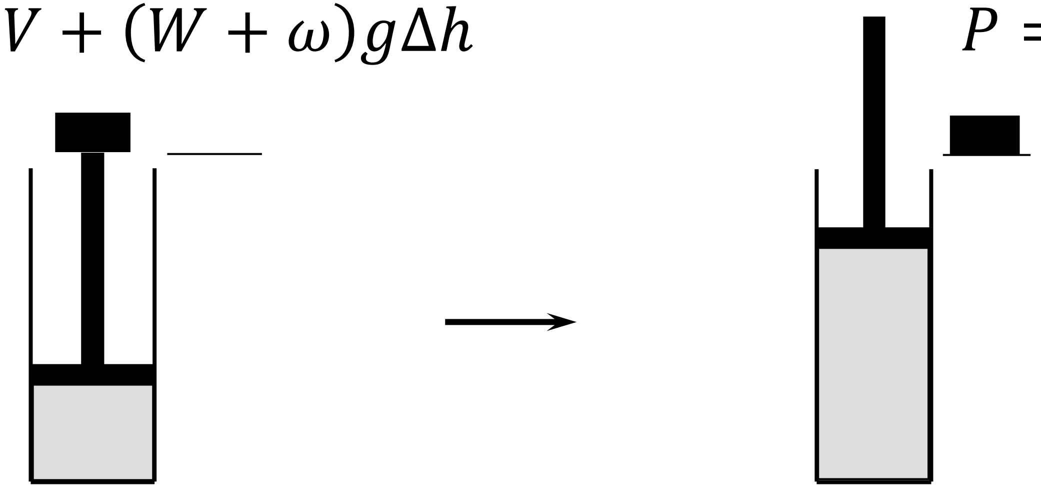
T = 297K
un mol de gas ideal

TRABAJO REALIZADO POR EL GAS SOBRE LOS ALREDEDORES cuando tanto el estado inicial como el final son estados de equilibrio (velocidad del pistón nula), y además **no hay fricción**.

$$\int PdV = P_{atm}\Delta V + (W+\omega)g\Delta h$$

$$P = P_{atm} + \frac{(W+\omega)}{A}g$$

Presión de equilibrio



Cálculo de Volúmenes:

$$P_i = 1bar + \frac{(5.3+91.6)kg \times 9.8m/seg^2}{\pi \times (0.055)^2 m^2} \times \frac{bar}{10^5 Pa} = 2bar$$

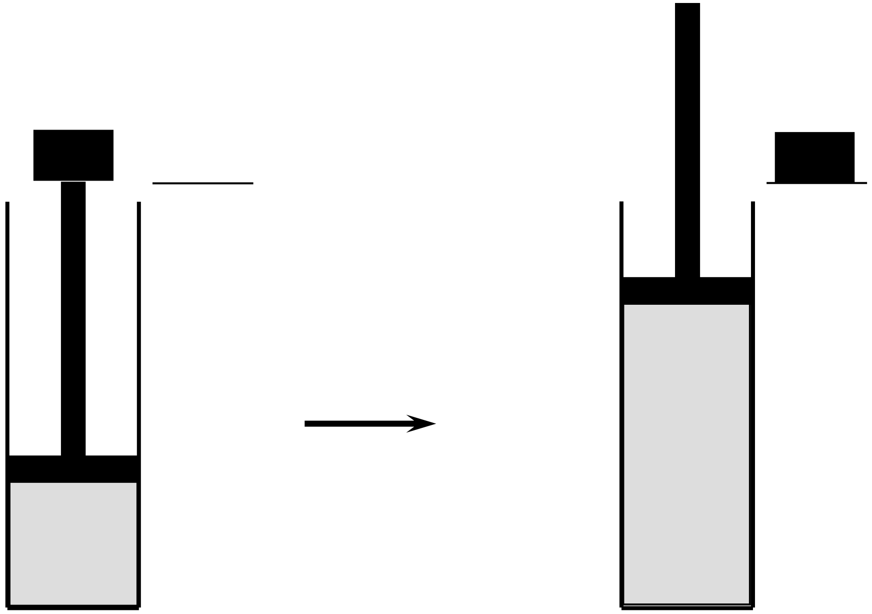
$$P_f = 1bar + \frac{5.3kg \times 9.8m/seg^2}{\pi \times (0.055)^2 m^2} \times \frac{bar}{10^5 Pa} = 1.05bar$$

$$V_i = RT/P_i = 83.14 \times 297/2 = 12346cm^3$$

$$V_f = RT/P_f = 83.14 \times 297/1.05 = 23517cm^3$$

Proceso en 1 etapa

T = constante = 297K



P = 2 bar
V = 12346 cm³

P = 1.05 bar
V = 23517 cm³

$$\Delta U = \int c_V dT = 0$$

$$W = -\int PdV = -1{,}05bar \times (23517 - 12346)cm^3 \times \frac{10^5 \, {}^{N}/_{m^2}}{bar} \times \frac{m^3}{10^6 cm^3} = -1173J$$

$$Q = -W = 1173J$$

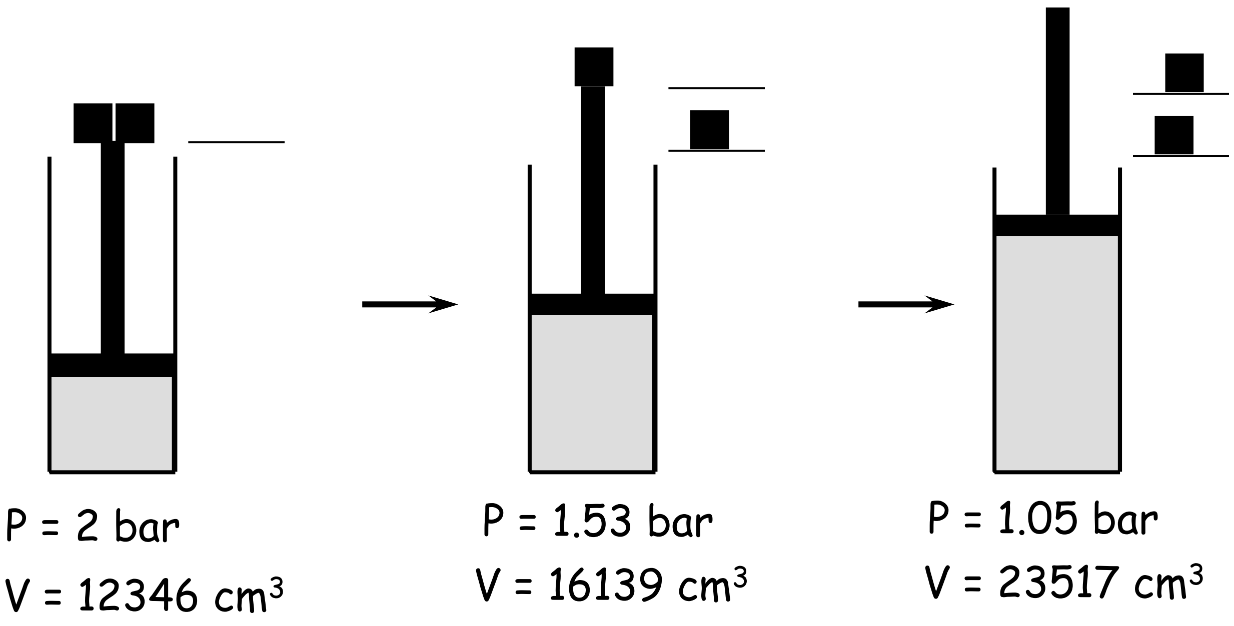
Se debe proporcionar calor para que T se mantenga constante e igual a 297K

Proceso en 2 etapas

Se quita la mitad de las pesas en cada etapa

Masa pistón: 5.3 kg.

Masa total pesas: 91.6 kg.



$$W_1 = -1.53 bar \times (16139 - 12346) cm^3 = -580.3 J \qquad Q_1 = -W = 580.3 J$$

$$W_2 = -1.05 bar \times (23517 - 16139) cm^3 = -774.7 J \qquad Q_2 = -W = 774.7 J$$

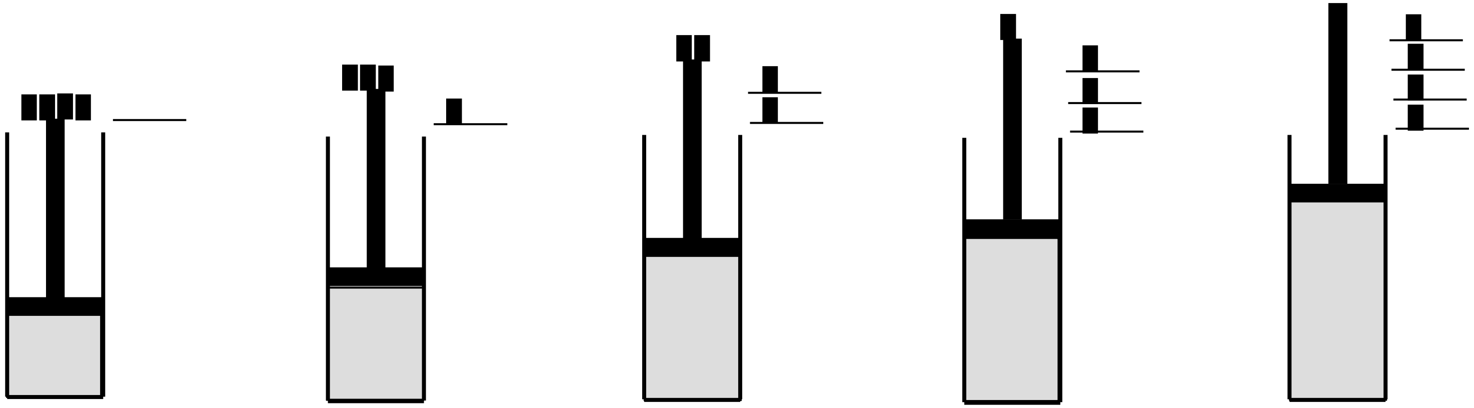
$$V_f = RT/P_f = 83.14 \times 297/1.05 = 23517 cm^3 \qquad Q = -W = 1355 J$$

Proceso en 4 etapas

La pesa inicial se divide en 4 partes y se va quitando 1/4 cada vez

Masa pistón: 5.3 kg.

Masa total pesas: 91.6 kg.



P = 2 bar	P = 1.76 bar	P = 1.53 bar	P = 1.29 bar	P = 1.05 bar
V = 12346 cm^3	V = 14030 cm^3	V = 16139 cm^3	V = 19141 cm^3	V = 23517 cm^3

$$W_1 = -1.76bar \times (14030 - 12346)cm^3 = -296J \qquad Q_1 = -W_1 = 296J$$

$$W_2 = -1.53bar \times (16139 - 14030)cm^3 = -323J \qquad Q_2 = -W_2 = 323J$$

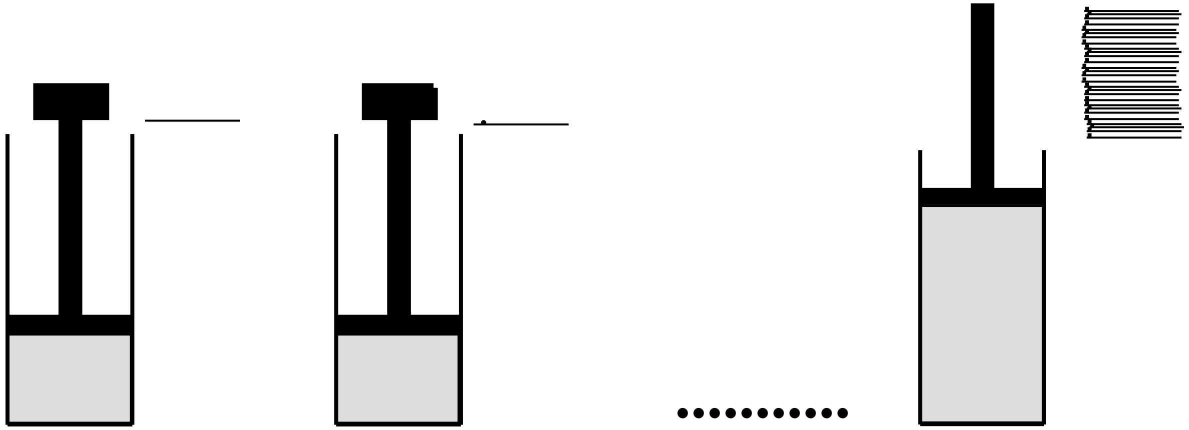
$$W_3 = -1.29bar \times (19141 - 16139)cm^3 = -387J \qquad Q_3 = -W_3 = 387J$$

$$W_4 = -1.05bar \times (23517 - 19141)cm^3 = -459J \qquad Q_4 = -W_4 = 459J$$

$$W = -296 - 323 - 387 - 459 = -1465J \qquad Q = -W = 1465J$$

Proceso en infinitas etapas

Se divide la pesa en porciones infinitesimales que se van quitando de una a la vez. En cada etapa la presión externa es sólo infinitesimalmente inferior a la presión del gas contenido en el cilindro, y se produce un aumento infinitesimal dV del volumen.



P = 2 bar
V = 12346 cm^3

P = 2 bar - dP
V = 12346 cm^3 + dV

P = 1.05 bar
V = 23517 cm^3

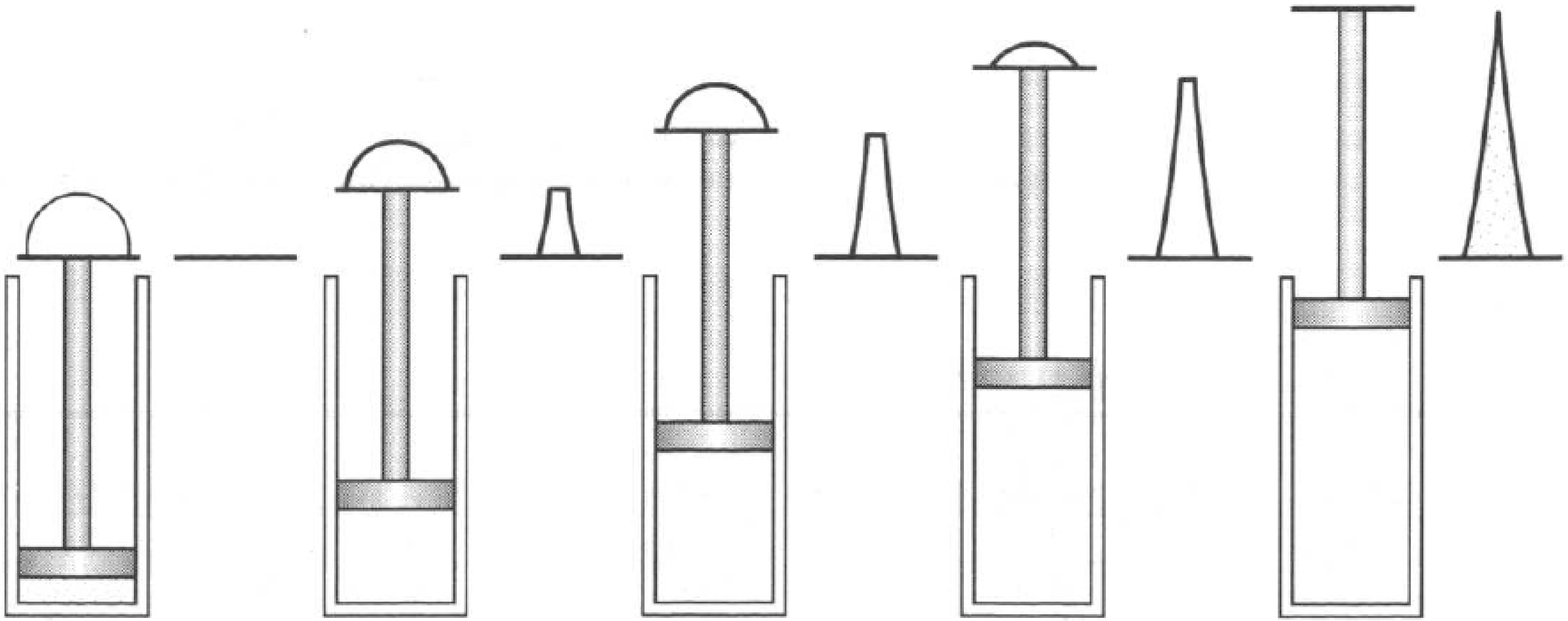
$$W = -\sum_{i=1}^{\infty} P_i \Delta V_i = -\int_{V_i}^{V_f} P dV = -\int_{V_i}^{V_f} RT \frac{dV}{V} = -RT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = RT \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

$$Q = -W$$

$$W = 8.314 \times 297 \times \ln(1.05/2) = -1591J$$

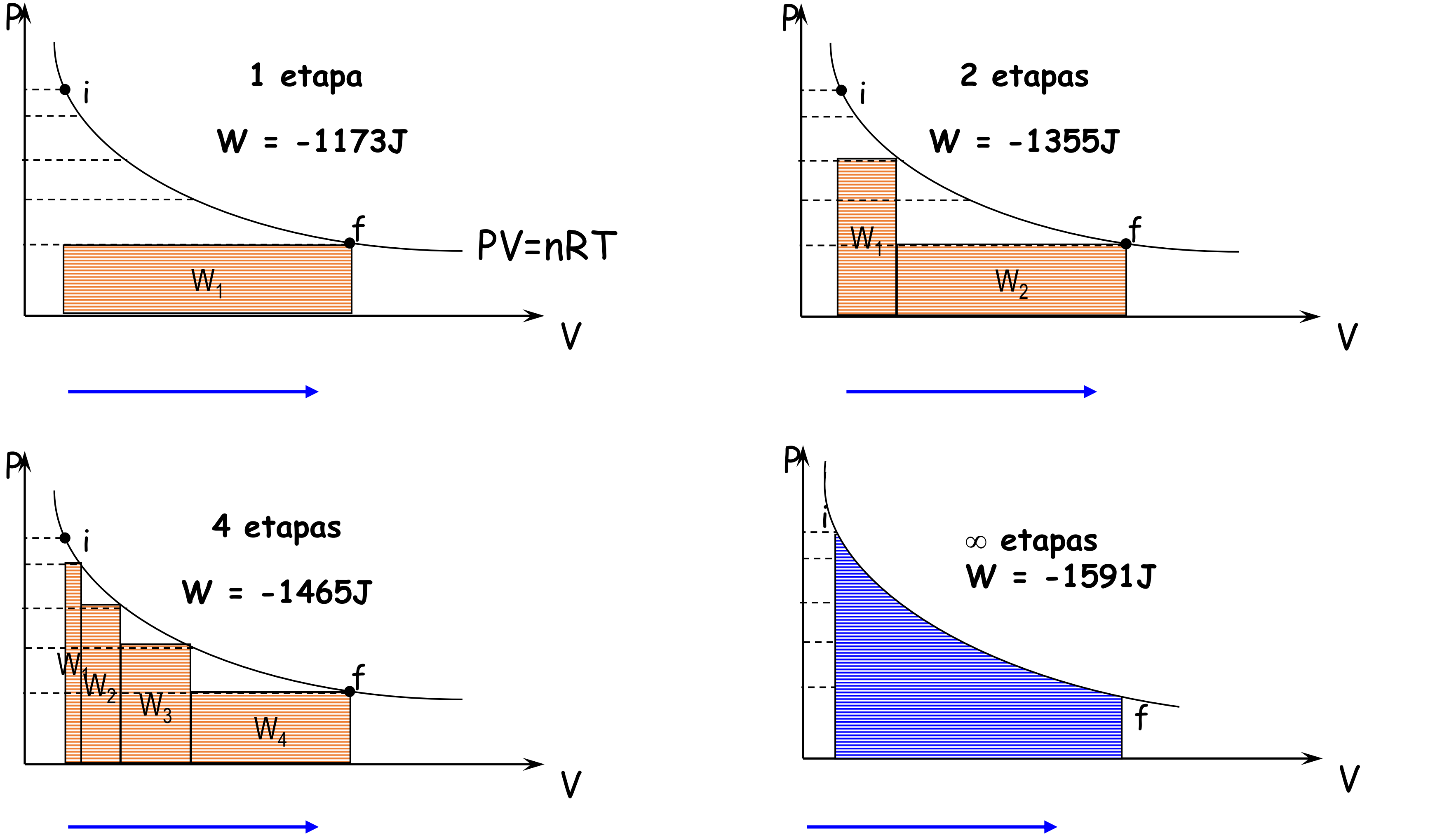
$$Q = 1591J$$

Proceso en infinitas etapas



Representación gráfica del trabajo de expansión

$$W = -P\Delta V \qquad W = -\int PdV$$



Efecto Joule - Thomson