ANÁLISIS MATEMÁTICO I

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS 2012

UNIDAD 2: INTEGRACIÓN

Preparada por el Prof. Antonio Crivillero Rao

INTEGRALES INDEFINIDAS

MÉTODO DE INTEGRACIÓN

Ejercicios resueltos

a) **Integral Inmediata**

1)

$$\int x.\sqrt{x/\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int x(x)^{1/2}/(x)^{3/4}dx = \int x^{3/2}/x^{3/4}dx = \int x^{3/4}dx = \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$$

2)

$$\int\left(-\frac{2}{3}e^3+\sqrt[3]{x^4}\right)dx = -\frac{2}{3}e^3x+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$$

3)

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln(5)}+C$$

4)

$$\int \frac{\pi}{8(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{8}arctg(x)+C$$

5)

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C$$

6)

$$\int -\frac{8}{\cos^2 x}dx = -8tgx+C$$

7)

$$\int \frac{\left(sen^2x+\cos^2 x\right)}{sen^2x}dx = -ctgx+C$$

8)

$$\int\left(8y-\frac{2}{y^{\frac{1}{4}}}\right)dy = 4y^2-\frac{8}{3}y^{\frac{3}{4}}+C$$

b) **Integración por regla de cadena** (semi-inmediata) Sustitución Directa.

1)

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} =$$

Sustitución

$$t = \frac{x}{a}$$

$$dt = \frac{1}{a}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}arctgt + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

2)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

3)

$$\int \cos\left(\ln\left(x\right)\right)\frac{1}{x}dx = sen\left(\ln\left(x\right)\right)+C$$

4)

$$\int \frac{\left(x^2+4\right)}{\left(x^3+12x+8\right)}dx = \frac{1}{3}\ln\left[\left(x^3+12x+8\right)\right]+C$$

5)

$$\int sen\left(5x\right)\sqrt{\cos\left(5x\right)}dx = -\frac{2}{15}\cos\left(5x\right)\sqrt{\cos\left(5x\right)}$$

6)

$$\int \left(\cos^3 x + x^3\right)\left(\cos^2 x.sen\left(x\right)-x^2\right) = -\frac{1}{6}\left(\cos^3 x + x^3\right)^2 + C$$

7)

$$\int \frac{e^{4x}}{1+e^{8x}};\int\left(\frac{e^{4x}}{1+e^{8x}}\right)dx = \frac{1}{4}arctg(e^{4x})+C$$

8)

$$\int \frac{2^{\sqrt{w}}dw}{2\sqrt{w}} = \frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln\left(2\right)}+C$$

9)

$$\int \frac{2tdt}{\sqrt{1-t^4}} = arcsen\left(t^2\right)+C$$

10)

$$\int\left(\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\right)dx=$$

$$u=x^2+x+1$$
$$du=(2x+1)\,dx$$

$$=\int\frac{\cancel{(2x+1)}}{\sqrt[3]{u}}\frac{du}{\cancel{(2x+1)}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}+C$$

11)

$$\int\sqrt[3]{2+\cos x}.senxdx=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(2+\cos x\right)^4}+C$$

c) **Método de Integración por partes**

El método de integración por partes esta basado en el siguiente teorema:

Si f y g son dos funciones derivables y si f' y g' son funciones continuas, entonces: $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ (1)

Observación:

I) A los fines prácticos se suele utilizar la siguiente fórmula para la integración por partes:

Si $u=f(x)\to du=f'(x)dx$

$v=g(x)\to dv=g'(x)dx$ sustituyendo todo esto en (1) obtenemos

$\int udv=uv-\int vdu$

II) El propósito de usar el método de integración por partes es el de realizar una integral más simple $\int vdu$ que la original $\int udv$

III) Procedimiento:

a. Se elige como $u=f(x)$ a la función que no sea tan complicada de calcular su derivada.
b. Se elige como $dv=g'(x)dx$ a la expresión que se pueda integrar fácilmente para obtener v
c. Se verifica si la elección es adecuada cuando al calcular la integral $\int vdu$ sea menos complicada que la integral original $\int udv$

Veamos algunos tipos en los que se pueda aplicar la fórmula para integrar por partes:

Tipo A

Función potencial x^m multiplicada por un exponencial e^{ax} ó por una función seno ó coseno.

Ejemplo 1)

$$\int xe^x dx \qquad u = x \to du = dx$$

$$dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\int xe^x dx = e^x\left(x-1\right)+C$$

Ejemplo 2)

$$\int xsenxdx \qquad u = x \to du = dx$$

$$dv = senxdx \to v = \int senxdx = -\cos x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xsenxdx = -x\cos x + \int \cos xdx$$

$$\int xsenxdx = -x\cos x + senx + C$$

Ejemplo 3)

$$\int x\cos xdx \qquad u = x \to du = dx$$

$$dv = \cos xdx \to v = \int \cos xdx = senx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\cos xdx = xsenx - \int senxdx$$

$$\int x\cos xdx = xsenx + \cos x + C$$

<u>Observación</u>:
La función potencial x^m multiplicada por una exponencial e^{ax} o por una función seno o coseno se integran por partes y la elección de u es siempre la función exponencial.

$$\int x^u e^{ax} dx \qquad u = x^u ; dv = e^{ax} dx$$

$$\int x^u senaxdx \qquad u = x^u ; dv = senaxdx$$

$$\int x^u \cos axdx \qquad u = x^u ; dv = \cos axdx$$

Calcular las siguientes integrales del **Tipo A**.

	<u>Integral</u>	<u>Respuesta</u>
1)	$\int x^3 e^x dx$	$e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + C$
2)	$\int x^2 e^{-x} dx$	$-e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C$
3)	$\int xsen2xdx$	$\frac{1}{4}sen2x - \frac{1}{2}x\cos^2 x + C$

4) $\int x^3 senx dx$ $\quad -x^3\cos x + 3x^2 senx + 6x\cos x - 6senx + C$

5) $\int x^2 \cos x dx$ $\quad senx\left(x^2-2\right) + 2x\cos x + C$

6) $\int x\cos(3x)dx$ $\quad \frac{1}{3}\left(xsen3x + \frac{1}{3}\cos 3x\right) + C$

Tipo B

- Función logarítmica multiplicada por una exponencial x^n se integra por partes; donde se elige como $dv = x^m dx$
- Funciones trigonométricas inversas multiplicadas por una constante o por una identidad x se integra por partes, donde $dv = xdx$

Ejemplo 1)

$$\int x^4 \ln x dx \qquad u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^4 dx \to v = \frac{1}{5}x^5$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln x x^4 dx = \ln x \frac{1}{5}x^5 - \int \frac{1}{5}x^5 \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5}\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x^5\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}x^5\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + C$$

Ejemplo 2)

$$\int arcsenx dx \qquad u = arcsenx \to du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dv = dx \to v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int arcsenx dx = arcsenx x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= xarcsenx - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

$$\int arcsenx dx = xarcsenx - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

Por sustitución

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad w=1-x^2 \qquad dw=-2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int w^{-\frac{1}{2}}dw=-\frac{1}{2}\left(2w^{\frac{1}{2}}\right)=-\sqrt{w}=-\sqrt{1-x^2}$$

Ejemplo 3)

$$\int arctg\left(2x\right)dx \qquad u=arctg\left(2x\right)\to du=\frac{2}{1+\left(2x\right)^2}dx$$

$$dv=dx\to v=x$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$\int arctg\left(2x\right)dx=arctg\left(2x\right)x-\int x\frac{2}{1+4x^2}dx$$

$$=xarctg\left(2x\right)-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+C$$

$$\int arctg\left(2x\right)dx=xarctg\left(2x\right)-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int \frac{2x}{1+4x^2} \qquad w=1+4x^2\to dw=8xdx\to dx=\frac{dw}{8x}\\ \displaystyle\frac{1}{4}\int\frac{dw}{w}=\frac{1}{4}\ln w=\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)\end{array}}$$

Calcular las siguientes integrales **Tipo B**

	Integral	Respuesta
1)	$\int \ln x^{-3}dx$	$-\frac{1}{2}x^{-2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$
2)	$\int xarcsenxdx$	$\left(\frac{2x^2-1}{4}\right)arcsenx+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$
3)	$\int xarctgxdx$	$\left(\frac{x^2+1}{2}\right)arctgx-\frac{x}{2}+C$

Tipo C

Función exponencial e^x multiplicada por la función seno o coseno se integra por partes y la elección de u y de dv es de cualquier forma. Es decir se puede elegir a u como la función trigonométrica, ver ejemplo 1) o se puede elegir u como la función exponencial, ver ejemplo 2).

Ejemplo 1) $\int e^x senxdx=$

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad u=senx\to du=\cos xdx;\ dv=e^x dx\to v=e^x$$

$$\int e^x senxdx=senxe^x-\int e^x\cos xdx$$

Dejemos por un momento e integremos $\int e^x \cos xdx$ lo hacemos por partes:

$u = \cos x \rightarrow du = -senxdx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

$\int e^x \cos xdx = \cos xe^x + \int e^x senxdx$

Volvemos donde habíamos quedado y reemplazamos

$\int e^x \cos xdx = \cos xe^x + \int e^x senxdx$

$\int e^x senxdx = senxe^x - \cos xe^x - \int e^x senxdx$

$2\int e^x senxdx = e^x senx - e^x \cos x \rightarrow \int e^x senxdx = \frac{1}{2} e^x (senx - \cos x) + C$

Ejemplo 2) $\int e^x \cos xdx$

$\int udv = uv - \int vdu \quad u = e^x \rightarrow du = e^x dx; dv = \cos xdx \rightarrow v = senx$

$\int e^x \cos xdx = e^x senx - \int senxe^x dx$

Dejemos por un momento e integremos $\int senxe^x dx$ lo hacemos por partes:

$u = e^x \rightarrow du = e^x dx$

$dv = senxdx \rightarrow v = -\cos x$

$\int senxe^x dx = e^x(-\cos x) + \int \cos xe^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx$

Donde habíamos quedado, reemplacemos

$\int senxe^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx$

$\int e^x \cos xdx = e^x senx - \int senxe^x dx = e^x senx - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos xdx\right)$

$= e^x senx + e^x \cos x - \int e^x \cos xdx$

$2\int e^x \cos xdx = e^x senx + e^x \cos x \rightarrow \int e^x \cos xdx = \frac{1}{2} e^x (senx + \cos x) + C$

Calcular las siguientes integrales del **Tipo C**

	Integral	Respuesta
1)	$\int e^{3x} senxdx$	$\frac{1}{13} e^{3x} (3sen2x - \cos 2x) + C$
2)	$\int e^{3x} \cos 2xdx$	$\frac{1}{13} e^{3x} (3\cos(2x) + 2sen(2x)) + C$
3)	$\int e^{3x} (sen2x - \cos 2x) dx$	$\frac{e^{3x}}{13} (sen(2x) - 5\cos(2x)) + C$

Ejercicios varios de integrales por partes

Integral Respuesta

1)	$\int xe^{-x}dx$	$-e^{-x}\left(x+1\right)+C$
2)	$\int \left(x+1\right)^2 e^x dx$	$e^x\left(x^2+1\right)+C$
3)	$\int \left(x^2+x\right)e^{-x}dx$	$e^{-x}\left(-x^2-3x-3\right)+C$
4)	$\int \ln\left(x\right)dx$	$x\left(\ln x-1\right)+C$
5)	$\int \ln^2\left(x\right)dx$	$x\left(\ln^2 x\right)+2x\left(1-\ln x\right)+C$
6)	$\int x^{-\frac{1}{2}}\ln x dx$	$2x^{\frac{1}{2}}\left(\ln x-2\right)+C$
7)	$\int \left(x/\ln x\right)dx$	$\frac{1}{2}\left(\ln^2\left(x\right)\right)+C$
8)	$\int arctg\left(3x\right)dx$	$xarctg\left(3x\right)-\frac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right)+C$
9)	$\int e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(x/2\right)dx$	$e^{-\frac{x}{2}}\left(sen\left(x/2\right)-\cos\left(x/2\right)\right)+C$
10)	$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$	$x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$
11)	$\int sen\left(\ln\left(x\right)\right)dx$	$\frac{x}{2}\left(sen\left(\ln\left(x\right)\right)-\cos\left(\ln\left(x\right)\right)\right)+C$
12)	$\int \cos\left(\ln\left(x\right)\right)dx$	$\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln\left(x\right)\right)+sen\left(\ln\left(x\right)\right)\right)+C$
13)	$\int e^{\sqrt{x}}dx$	$2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$
14)	$\int sen^2 x dx$	$\frac{x}{2}-\frac{sen2x}{4}+C$

d) **Integración de funciones alg. Racionales**

$\int \frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}dx$ Donde $P\left(x\right)$ y $Q\left(x\right)$ son polinomios de grado "m" y "n" respectivamente. Es decir,

$$P\left(x\right)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1 x+a_0$$
$$Q\left(x\right)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1 x+b_0$$

Consideremos los siguientes casos:

CASO I) El grado del numerador $P\left(x\right)$ es menor que el grado del denominador $Q\left(x\right)$; es decir: $m<n$

I. -1) **El grado de** $P\left(x\right)$ **es cero (polinomio constante**: $P\left(x\right)=a_0$. **El grado del** $Q\left(x\right)$ **es 1 (uno)** (**Polinomio lineal:** $Q\left(x\right)=b_1x+b_0$)

$\int \frac{a_0}{b_1x+b_0}dx$ Se resuelve por sustitución directa.

Ejemplo 1)

$$\int \frac{3}{4x+2}dx \quad \text{si } u = 4x+2 \rightarrow du = 4dx$$

$$\int \frac{3}{4x+2}dx = \frac{3}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{4}\ln|u| + C = \frac{3}{4}\ln|4x+2| + C$$

I. -2) **El denominador $Q(x)$ tiene raíces reales, simples y distintas. Se resuelve previamente aplicando "DESCOMPOSICIÓN en fracciones Simples; que consiste en descomponer $P(x)/Q(x)$ en suma de fracciones simples"**

Ejemplo 1)

$$\int \frac{x-5}{2x^2-10x+8}dx$$

a) Se calculan las raíces del denominador $2x^2-10x+8=0$ donde $x_1=1; x_2=4$ luego tenemos dos raíces reales y distintas; luego $2x^2-10x+8=2(x-1)(x-4)$

b) Aplicamos "Descomposición en fracciones simples"

$(x-5)/2x^2-10x+8 = k_1/2(x-1)+k_2/(x-4) \rightarrow (x-5)/2x^2-10x+8 =$

$[k_1(x-4)+k_2 2(x-1)]/2(x-1)(x-4);$

Luego $(x-5)=k_1(x-4)+k_2 2(x-1)$

si $x=1 \rightarrow -4 = k_1(-3) \rightarrow k_1 = \frac{4}{3}$

si $x=4 \rightarrow -1 = k_2(6) \rightarrow k_2 = -\frac{1}{6}$

Por consiguiente tenemos $(x-5)/2x^2-10x+8 = 4/3/2(x-1)+(-1/6)/(x-4)$

Finalmente integrando:

$\int (x-5)dx/2x^2-10x+8 = \int 4/3dx/2(x-1) + \int (-1/6)dx/(x-4)$

$\int (x-5)dx/2x^2-10x+8 = 2/3\,ln|x-1| - 1/6\,ln|x-4| + C$

I. -3) **El denominador $Q(x)$ tiene raíces reales múltiples. También se resuelve aplicando previamente la "Descomposición en fracciones simples".**

Ejemplo 1)

$\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}dx$ Las raíces del denominador son:

$(x-2)^3=0 \rightarrow (x-2)(x-2)(x-2)=0$

$x_1=x_2=x_3=2$ tres raíces reales e iguales.

$$\int\frac{2x+3}{(x-2)^3}dx=\frac{k_1}{(x-2)^3}+\frac{k_2}{(x-2)^2}+\frac{k_3}{(x-2)}=\frac{k_1+k_2(x-2)+k_3(x-2)^2}{(x-2)^3}$$

$2x+3=k_1+k_2(x-2)+k_3(x-2)^2$

si $x=2\to 7=k_1$; si $x=0\to 3=7-2k_2+4k_3$

$-2k_2+4k_3=-4$ si $x=1\to 5=7-k_2+k_3\to -k_2+k_3=-2$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos que k_2 =2, k_3 =0.

Luego tenemos:

$$\int\frac{2x+3}{(x-2)^3}dx=\frac{7}{(x-2)^3}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\therefore\int\frac{2x+3}{(x-2)^3}dx=\int\frac{7}{(x-2)^3}dx+\int\frac{2}{(x-2)^2}=-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)-2\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$\int\frac{2x+3}{(x-2)^3}dx=\frac{-7}{2(x-2)^2}+\frac{-2}{x-2}+C$$

I. -4) **El numerador es un polinomio de grado cero. El denominador es un polinomio con raíces complejas simples**.

$\int\frac{1}{Q(x)}dx$ Se resuelve por sustitución directa previamente se completa en el denominador los cuadrados.

Ejemplo 1)

$\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$ Calculo de las raíces del denominador $\begin{aligned}&x^2-2x+5=0\\&x_1=1+2i\\&x_2=1-2i\end{aligned}$

Completar los cuadrados en $x^2\_2x+5=(x-1)^2+4$

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+5}=\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}\left\{\text{llevan la forma }\int\frac{du}{u^2+1}\right.$$

$$\int\frac{\frac{1}{4}dx}{\frac{(x-1)^2+4}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\left\{\begin{aligned}&\text{si } u=\frac{x-1}{2}\\&du=\frac{1}{2}dx\end{aligned}\right.$$

$$\frac{2}{4}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{2}arctgu=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$$

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+5}=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+C$$

I. -5) **El numerador es un polinomio lineal de la forma** $P(x)=a_1x+a_0$**.** **El denominador es un polinomio cuadrático de la forma** $Q(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$ **con raíces complejas simples**.

$\int \frac{3x-4}{x^2-4x+5}dx$ Calcular las raíces del denominador: $\begin{array}{l} x^2-4x+5=0 \\ x_1=2+i; x_2=2-i \end{array}$

…Derivamos el denominador $\left(x^2-4x+5\right)'=2x-4$

…La derivada obtenida debe figurar en el numerador $3x-4=\frac{3}{2}(2x-4)+2$

$$\int \frac{3x-4}{x^2-4x+5}dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int \frac{2}{x^2-4x+5}dx}_{\mathrm{II}}$$

I

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx=\begin{cases} u=x^2-4x+5 \\ du=(2x-4)dx \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{3}{2}\ln|u|=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|$$

II

Se resuelve como en el caso **I – 4).**

$$\int \frac{2}{x^2-4x+5}dx\begin{cases} x^2-4x+5=(x-2)^2+1 \\ u=(x-2)\rightarrow du=dx \end{cases}$$

$$\int \frac{2du}{u^2+1}=2\int \frac{du}{u^2+1}=2arctgu=2arctg\,(x-2)$$

Resultado:

$$\int \frac{3x-4}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+5\right|+2arctg\,(x-2)+C$$

I. -6) **El denominador tiene raíces reales y complejas**.

$$\int\left(2x^3-4x-8\right)dx\Big/x(x-1)\left(x^2-4\right)$$

Nos damos cuenta que el denominador tiene dos raíces reales y complejas conjugadas; luego tenemos:

$$(2x^3-4x-8)\big/x(x-1)(x^2-4)=k_1/x+k_2/(x-1)+(k_3x+k_4)\big/(x^2+4)$$
$$(2x^3-4x-8)=k_1(x-1)(x^2+4)+k_2x(x^2+4)+(k_3x+k_4)x(x-1)$$
si $x=0\rightarrow -8=k_1(-1)(4)+0+0\rightarrow k_1=2$

si $x=1\rightarrow -10=0+k_2(5)+0\rightarrow k_2=-2$

si $x=-1\rightarrow -6=2(-2)(5)+(-2)(-1)(5)+(-k_3+k_4)(-1)(-2)\rightarrow 2=-k_3+k_4$

si $x=2\rightarrow 0=2(1)(8)+(-2)(2)(8)+(2k_3+k_4)(2)(1)\rightarrow 8=2k_3+k_4$

Resolviendo este sistema

$2=-k_3+k_4$

$8=2k_3+k_4$

Obtenemos $k_3=2$ y $k_4=4$

$$\int(2x^3-4x-8)dx\big/x(x-1)(x^2-4)=\int\left(2/x-2\big/(x-1)+2x\big/(x^2+4)+4/x^2+4\right)dx=$$
$$=2ln|x|-2ln|x-1|+ln(x^2+4)+2arctg(x/2)+C$$

CASO II) EL Grado del polinomio numerador $P(x)$ es mayor o igual que el grado del denominador $Q(x)$; es decir $m\geq n$

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

En este caso se procede de la siguiente manera:

a) Se efectúa la división de polinomios $\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$

b) Se expresa $P(x)=C(x)Q(x)+R(x)$

c) En esta última expresión se divide por $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{C(x)Q(x)+R(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

d) Integramos lo obtenido últimamente

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}\right)dx=\int C(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

e) La primera integral al ser $C(x)$ un polinomio, e inmediata. En cambio la segunda integral se resuelve según el caso que tengamos.

Ejemplo 1)

$$\int\frac{3x+2}{x+4}dx$$

$$\begin{array}{l|l} 3x+2 & x+4 \\ -3x-12 & \overline{3} \\ \hline \quad -10 & \end{array}$$

$$3x+2=3(x+4)-10$$

$$\frac{3x+2}{x+4}=\frac{3(x+4)-10}{x+4}=3-\frac{10}{x+4}$$

$$\int \frac{3x+2}{x+4}dx=\int\left(3-\frac{10}{x+4}\right)dx=3\int dx-10\int\frac{dx}{x+4}$$

$$\int \frac{3x+2}{x+4}dx=3x-10\ln|x+4|+C$$

Ejemplo 2)

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4}-\cancel{x^3}-x-1 & x^3-x^2 \\ -\cancel{x^4}+\cancel{x^3} & \overline{x} \\ \hline \quad -x-1 & \end{array}$$

$$x^4-x^3-x-1=x\left(x^3-x^2\right)+(-x-1)$$

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}=\frac{x\left(x^3-x^2\right)-x-1}{\left(x^3-x^2\right)}=x+\frac{-x-1}{x^3-x^2}$$

$$\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx=\int\left(x+\frac{-x-1}{x^3-x^2}\right)dx=\int xdx+\int\frac{-x-1}{x^3-x^2}dx$$

Según el **Caso II**.

a) $x^3-x^2=0\rightarrow\begin{cases} x_{1,2}=0 \\ x_3=1 \end{cases}$

b) por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{-x-1}{x^3-x^2}=\frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{x}+\frac{k_3}{x-1}\begin{cases} k_1=1 \\ k_2=2 \\ k_3=-2 \end{cases}$$

$$\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

$$\int\frac{-x-1}{x^3-x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{-2}{x-1}\right)dx=\int\frac{1}{x^2}dx+2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{x}+2\ln|x|-2\ln|x-1|$$

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln|x|-2\ln|x-1|+C$$

$$\therefore \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$$

Ejercicios de Integración de Funciones Racionales

Integral	Respuesta
1) $\int \frac{-5}{-x+3}dx$	$5\ln\lvert -x+3\rvert+C$
2) $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$	$\frac{3}{11}\ln\lvert 3x+1\rvert+\frac{2}{33}\ln\lvert 2x-3\rvert-\frac{1}{3}\ln\lvert x\rvert+C$
3) $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$	$\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C$
4) $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$	$\frac{1}{5}\ln\left\lvert (x-2)^2\sqrt{2x+1}\right\rvert+C$
5) $\int \frac{5x-7}{(x^2-x-2)(x-3)}dx$	$\ln\left\lvert\frac{(x-3)^2}{(x-2)(x+1)}\right\rvert+C$
6) $\int \frac{x-4}{2x^2-8x+6}dx$	$\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{(x-1)^3}{x-3}\right\rvert+C$
7) $\int \frac{4x^2+9x-1}{x^3+2x^2-x-2}dx$	$\ln\left\lvert\frac{(x-1)^3(x+1)^2}{x+2}\right\rvert+C$
8) $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx$	$\frac{1}{2}(x+3)^{-2}-2(x+3)^{-1}+C$
9) $\int \frac{(2x^2+1)}{(x-3)(x+1)^2}dx$	$\frac{13}{16}\ln\lvert (x-3)(x+1)\rvert+\frac{3}{4(x+2)}+C$
10) $\int \frac{x^3-3x+4}{(x-1)^3(x+1)}dx$	$\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{(x-1)^7}{(x+1)^3}\right\rvert+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$
11) $\int \frac{11/3}{x^2+4}dx$	$\frac{11}{6}arctg\left(\frac{1}{2}x\right)+C$
12) $\int \frac{-2/5}{-x^2-9}dx$	$\frac{2}{15}arctg\left(\frac{1}{3}x\right)+C$
13) $\int \frac{5x-11}{x^2+3x+7}dx$	$\frac{5}{2}\ln\lvert x^2+3x+7\rvert-\frac{37}{\sqrt{19}}arctg\left(\frac{2x+3}{\sqrt{19}}\right)+C$
14) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$	$\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2-2x+5\right)+2arctg\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\right]+C$
15) $\int \frac{3x+2}{x+5}dx$	$3x-13\ln\lvert x+5\rvert+C$
16) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$	$x+3\ln\left\lvert\frac{x-3}{x-2}\right\rvert+C$

17) $\int \frac{x^3-2x}{x^3-2x^2+x}dx$ $\qquad x+\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C$

18) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ $\qquad \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$

19) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ $\qquad \frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln(2x+1)+C$

20) $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$ $\qquad \frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C$

e) **Sustitución Inversa**

1) Sustitución $1+e^x=u$

$$\int \frac{dx}{1+e^x}= \qquad \begin{aligned} e^x &= (u-1) \\ x &= \ln(u-1) \\ dx &= \frac{du}{u-1} \end{aligned}$$

1)

$$\int \frac{dx}{1+e^x}=\int \frac{du}{u(u-1)}$$ Y se resuelve como función racional

$$\frac{1}{u(u-1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A=-1 \\ B=1 \end{Bmatrix}$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)}=-\int \frac{du}{u}+\int \frac{du}{(u-1)}=-\ln(u)+\ln(u-1)+C$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x}=-\ln(1+e^x)+\ln(e^x)=\ln\frac{(e^x)}{(1+e^x)}+C$$

2)

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)dx=2\left(\sqrt{x}sen\left(\sqrt{x}\right)+\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)+C$$ Sustitución $\sqrt{x}=u$

3)

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=arctg\left[e^x\right]+C$$ Sustitución $e^x=u$

4)

$$\int sen\sqrt{x+1}dx$$
$$=-\sqrt{x+1}\cos\left(\sqrt{x+1}\right)+sen\left(\sqrt{x+1}\right)+C$$ Sustituir $\sqrt{x+1}=u$

5)

$$\int \sqrt{1+senx}dx$$
$$=-\sqrt{1-senx}+C$$ Sustitución $(1+senx)=u^2$

6)

$$\int sen\left(3x+7\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{2}{3}\left[-\left(3x+7\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(3x+7\right)^{\frac{1}{2}}+sen\left(3x+7\right)^{\frac{1}{2}}\right]+C$$

Sustituir $\left(3x+7\right)=u^2$

f) **Integrales de funciones trigonométricas**

1)

$$\int sen^5xdx=\int senx\left(sen^2x\right)^2dx=\int sen\left(1-\cos^2x\right)^2dx=$$

$$\int sen^5xdx=\int senx\left(1-2\cos^2x+\cos^4x\right)dx=\int senxdx-2\int senx\cos^2xdx+\int senx\cos^4xdx$$

$$\int sen^5xdx=-\cos x+\frac{2}{3}\left[\cos x\right]^3-\frac{1}{5}\left[\cos x\right]^5+C$$

2)

$$\int\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}sen\left(\frac{x}{2}\right)-2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{3}sen^3\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

3)

$$\int sen^2xdx=\int\left(\frac{1-\cos\left(2x\right)}{2}\right)dx=\int\frac{1}{2}dx-\int\frac{\cos\left(2x\right)}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}sen\left(2x\right)+C$$

4)

$$\int\cos^4xdx=\frac{3}{8}x+\frac{sen2x}{4}+\frac{sen4x}{32}+C$$

5)

$$\int sen^2x\cos^3xdx=\int sen^2x\cos x\cos^2xdx=\int sen^2x\cos x\left(1-sen^2x\right)dx=$$

$$=\int sen^2x\cos xdx-\int sen^4x\cos xdx$$

6) $\int sen^2x\cos^3xdx=\frac{sen^3x}{3}-\frac{sen^5x}{5}+C$

7)

$$\int\left(sen^{\frac{3}{5}}x\cos^3x\right)dx=\frac{5}{8}sen^{\frac{5}{8}}x-\frac{5}{18}sen^{\frac{18}{5}}x+C$$

8)

$$\int sen^2\left[4x\right]\cos^2\left[4x\right]dx=\frac{x}{8}-\frac{sen\left(16x\right)}{128}+C$$

9)

$$\int sen^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{4}dx - \int \frac{1}{4}\cos^2(2x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen(4x) + C$$

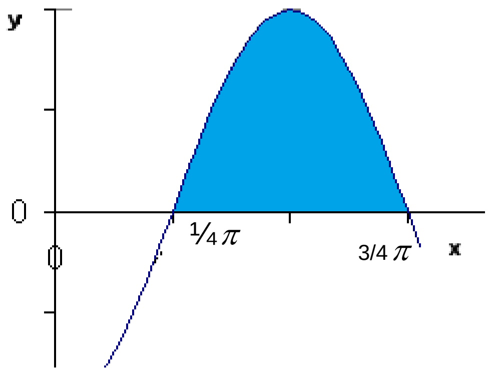
10)

$$\int\left(\sqrt[3]{\cos^5 x}\, sen^3 x\right)dx = -\frac{3}{8}\cos^{\frac{8}{3}} x + \frac{3}{14}\cos^{\frac{14}{3}} x + C$$

INTEGRALES DEFINIDAS

1)

$$\int_{1/4\pi}^{3/4\pi} -\cos(2x)dx$$



Sustitución

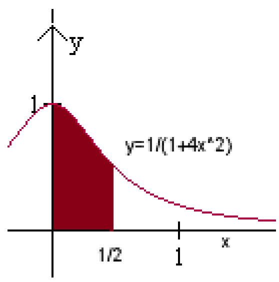
$u = 2x$

$$dx = \frac{1}{2}du$$

Al hacer el cambio de variable x por u, también cambian los límites de integración:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi \text{ como } u = 2x = \frac{3}{2}\pi \\ x = \frac{1}{4}\pi \text{ como } u = 2x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{1/2\pi}^{3/2\pi}\cos u du = -\frac{1}{2}\left(sen\frac{3}{2}\pi . sen\frac{\pi}{2}\right) = 1$$



2)

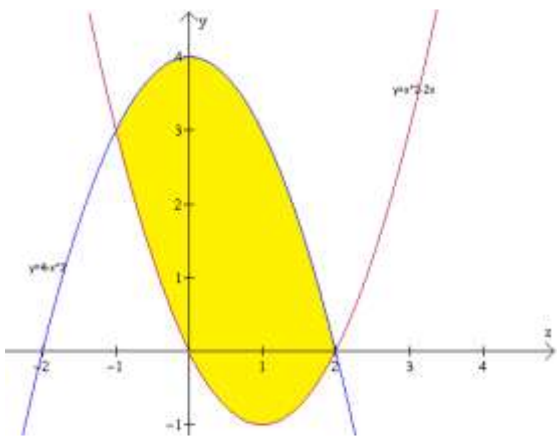
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{\pi}{8}$$

3) Hallar el área comprendida entre las parábolas

$y = 4 - x^2$

$y = x^2 - 2x$

$$|A| = \int_{-1}^{2}\left(x^2 - 2x - 4 + x^2\right)dx = |-9| = 9$$



Calcular la longitud del arco de $y = x^{\frac{3}{2}}$ que se extiende desde P=(1,1) y (4,4) = d con

5)

$$L = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\, dx$$

$$L = \int_{1}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx \cong 7,63$$

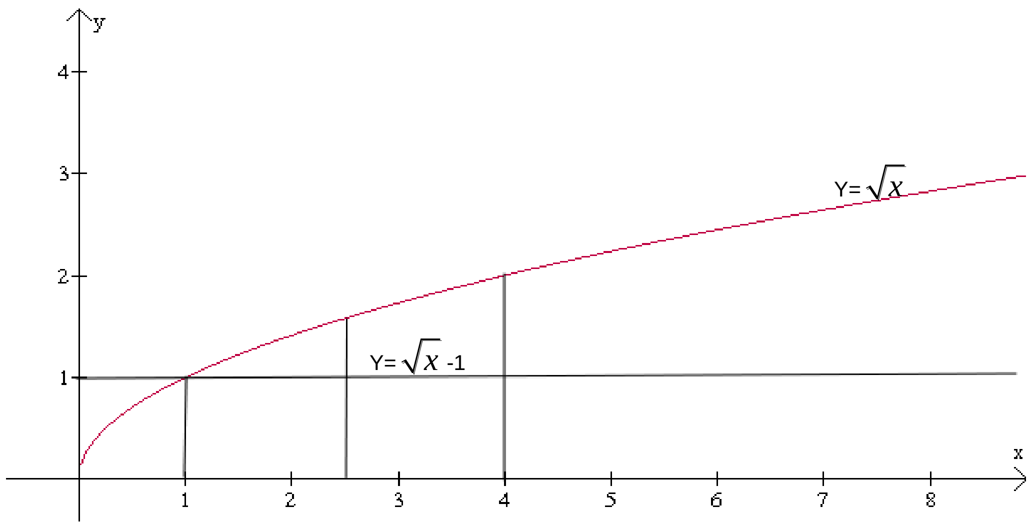
6)

$$\int_{1}^{3} \left(x^2 + 2x - 3\right) dx = \frac{32}{2}$$

7) Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas y=1; x=4 alrededor de la recta y=1

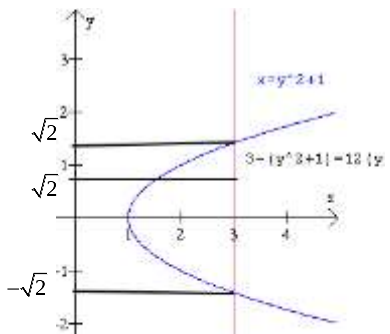
$$V = \int_{1}^{4} \pi \left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx = \frac{7}{6}\pi$$

Hallar los valores de α para que la integral converge o diverge



8) Hallar el volumen del sólido generado al girar la región entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi \left[2 - y^2\right] dy = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$



9) Hallar el área encerrada por la parábola $Y=-x^2+2$ y la recta $y=-x$

$$A=\int_1^2 [f(x)-g(x)]dx=\int_{-1}^2 \left(2+x-x^2\right)dx=\frac{9}{2}$$

Integración por el método de sustitución inversa.

1) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$ Sustitución $e^x-1=u^2$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx=2arctg\left(\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

2)

$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ Sustitución $x+1=u^2$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}+C$$

3)

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ Sustitución $x=\frac{1}{u}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)$$

Integración de funciones algebraicas racionales

a) Raíces Reales y distintas

1)

$$\int \frac{x}{\left(x^2-1\right)}dx =$$

Analizando integrando

$$\frac{x}{\left(x^2-1\right)} = \frac{A_1}{\left(x+1\right)} + \frac{A_2}{\left(x-1\right)}$$

$$\frac{x}{\cancel{\left(x^2-1\right)}} = \frac{A_1\left(x-1\right)+A_2\left(x+1\right)}{\cancel{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}}$$

$$x = A_1\left(x-1\right)+A_2\left(x+1\right)$$

Si $x=1 \Rightarrow 1 = A_2 2 \quad \rightarrow A_2 = \frac{1}{2}$

Si $x=-1 \Rightarrow -1 = -2A_1 \quad \rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}\right| + C$$

2)

$$\int \left(\frac{x^2+2x-3}{x^3+5x^2+6x}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln\left|\left(x+2\right)\right| + C$$

3)

$$\int \left(\frac{\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x-2\right)}\right)dx = \ln\left|\left(x-2\right)\right| + \ln\left|\left(x+1\right)\right| + C = \ln\left|\left(x+1\right)\left(x-2\right)\right| + C$$

4)

$$\int \left(\frac{4x+3}{x^2-5x+6}\right)dx = 15\ln\left|\left(x-3\right)\right| - 11\ln\left|\left(x-2\right)\right| + C$$

5)

$$\int \left(\frac{x-1}{1-4x^2}\right)dx = \frac{1}{8}\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| + \left(-\frac{3}{8}\right)\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)\right| + C$$

6)

$$\int \left(\frac{2x-1}{x^2-3x+2}\right)dx = \ln\left|\frac{\left(x-2\right)^3}{x-1}\right| + C$$

7)

$$\int \left(\frac{\left(x-8\right)}{x^3-4x^2+4x}\right)dx = \frac{3}{x-2} + \ln\left|\frac{\left(x-2\right)^2}{x^2}\right| + C$$

Integración de funciones Racionales del seno y coseno

1)

$$\int \frac{dx}{1+senx+\cos x}= \qquad \frac{x}{2}=arctgu;\ \ x=2arctgu$$

$$senx=\frac{2u}{1+u^2} \qquad dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+senx+\cos x}=\int \frac{2}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{1}{1+u^2}du=$$

$$=\int \frac{2du}{\frac{1+u^2+2u+1-u^2}{\left(1+u^2\right)}}\frac{1}{\left(1+u^2\right)}=\int \frac{2du}{2\left(1+u\right)}=\ln\left|1+tg\,\frac{x}{2}\right|+C$$

2)

$$\int \frac{x}{sen^2x}dx=-\frac{1}{2}\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{2}tg\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

3)

$$\int \frac{dx}{3+\cos x+2senx}=arctg\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)+1\right]+C$$

4)

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx=-tg\left(\frac{x}{2}\right)\cancel{+2}\frac{x}{2}+C$$

5)

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x}=\ln\left|\frac{tg\,\frac{x}{2}+2}{tg\left(\frac{x}{2}\right)-2}\right|^{\frac{1}{4}}+C$$

<u>Teorema valor medio</u>

Hallar el valor de c, del **teorema de la media**, de la función f(x) = $3x^2$ en el intervalo [−4, −1].

Como la función es continua en el intervalo [−4, −1], se puede aplicar el **teorema de la media**.

$$\int_{-4}^{-1}3x^2dx=\left[x^3\right]_{-4}^{-1}=-1+64=63$$

$$63=\left[-1-(-4)\right]f(c)$$

$f(c)=21 \qquad 3c^2=21 \qquad c=-\sqrt{7}$

La solución positiva no es válida porque no pertenece al intervalo.

2. ¿Es aplicable el **teorema del valor medio del cálculo integral** a la siguiente función en el intervalo [0, 1]?

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Como la función es continua en [0, 1], se puede aplicar el **teorema de la media**.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$$

$$f(c)=(1-0)\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad f(c)=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\sqrt{2}-1 \qquad c=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Calcular las siguientes integrales definidas aplicando la **regla de Barrow**.

<u>Ejercicios Resueltos</u>

1)

$$\int_{-1}^{1}\left(3x^3-x^2+x-1\right)dx$$

$$\int_{-1}^{1}\left(3x^3-x^2+x-1\right)dx=\left[\frac{3x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{8}{3}$$

2)

$$\int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x}=[ln\,x]_1^e=ln\,e-ln1=1-0=1$$

3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

4)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x \cos^4 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\left(1-\cos^2 x\right)\cos^4 x dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 x senx - \cos^6 x senx\right) dx = \left[-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$

5)

$$\int_2^4 \log x dx$$

$$u = \log x \xrightarrow{derivar} u' = \frac{1}{x}\log e$$

$$v' = 1 \xrightarrow{integrar} v = x$$

$$\int_2^4 \log x dx = [x \log x]_2^4 - \int_2^4 \log e dx = [x \log x - x \log e]_2^4 =$$
$$= 4 \log 2^2 - 4 \log e - 2 \log 2 + 2 \log e =$$
$$= 8 \log 2 - 4 \log e - 2 \log 2 + 2 \log e = 6 \log 2 - 2 \log e$$

6)

$$\int_0^{\pi^2} sen\sqrt{x} dx$$

Calculamos la integral definida por cambio de variable.

$$\int sen\sqrt{x} dx$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t dt$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$x = 0$ $\qquad t^2 = 0$ $\qquad t = 0$

$x = \pi^2 \qquad t^2 = \pi^2 \qquad t = \pi$

$$\int sent2tdt = 2\int tsentdt$$

Integramos por partes.

$$u = t \xrightarrow{derivar} u' = 1$$

$$v' = \operatorname{sen} t \xrightarrow{integrar} v = -\cos t$$

$$2\int tsentdt = 2\left(-t\cos t + \int \cos tdt\right) = 2(-t\cos t + sent) + C$$

$$2\int_0^{\pi} tsentdt = 2[-t\cos t + sent]_0^{\pi} = 2\pi$$

También se puede hacer sin transformar los límites de integración y volviendo a la variable inicial.

$$t = \sqrt{x}$$

$$\int sen\sqrt{x}dx = 2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + sen\sqrt{x}\right) + C$$

$$\int_0^{\pi^2} sen\sqrt{x}dx = 2\left[-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + sen\sqrt{x}\right]_0^{\pi^2} = 2\pi$$

7)

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \left[2\sqrt{1+x}\right]_0^3 = 2(2-1) = 2$$

8)

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 2x\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[(25)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{98}{3}$$

9)

$$\int_0^{\pi} sen^2xdx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}sen2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

10)

$$\int_2^3 \frac{dx}{x\,ln^4 x} = \int_2^3 ln^{-4} x \frac{1}{x} dx = \left[-\frac{1}{3ln^3 x} \right]_2^3 = -\frac{1}{3ln^3 3} + -\frac{1}{3ln^3 2}$$

12)

$$\int_0^{\pi} cos\, xe^{senx} dx = \left[e^{senx} \right]_0^{\pi} = e^0 - e^0 = 0$$

13)

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

$x = t^2$ $\quad dx = 2tdt$ $\quad 4 = t^2$ $\quad t = 2$

$0 = t^2$ $\quad t = 0$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = \quad R = 4 - -ln9$$

Ejercicios a Resolver

Integral	Respuesta
1) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$	$-5/72$
2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$	$2\sqrt{2}$
3) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$	
4) $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$	
5) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$	
6) $\int_0^{\pi} sen^2 xdx$	$\pi/2$
7) $\int_0^{\pi} tg^2 xdx$	
8) $\int_0^{\pi} senx\cos xdx$	0
9) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$	$ln\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$
10) $\int_2^3 \frac{dx}{x\,ln^4 x}$	
11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 xdx$	
12) $\int_0^{\pi} cos\, xe^{senx} dx$	0

13) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$

14) $\int_{-1}^{1} (\arccos x)^2 dx$

15) $\int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$ $\quad \frac{38}{3}$

16) $\int_{-2}^{3} |x| dx$ $\quad \frac{13}{2}$

17) $\int_0^4 \sqrt{3x} \left(\sqrt{x} + \sqrt{3} \right) dx$ $\quad 8\sqrt{3} + 16$

18) $\int_0^{\pi} (x \cos 3x) dx$ $\quad \frac{3}{8}$

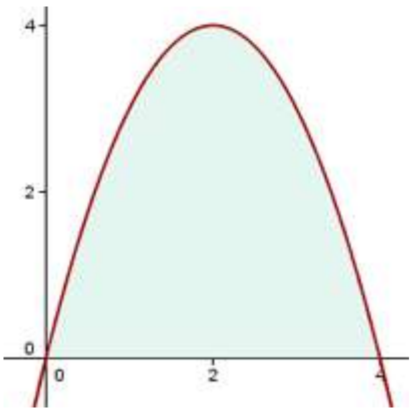
Aplicaciones de la Integral Definida

Ejercicios resueltos

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva y = 4x − x^2 y el eje OX.

En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

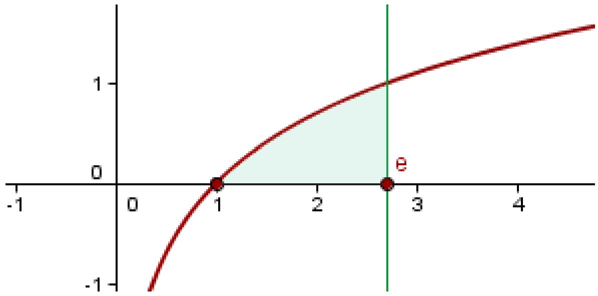
$$0 = 4x - x^2 \qquad x = 0 \qquad x = 4$$



En segundo lugar se calcula la integral:

$$A = \int_0^4 \left(4x - x^2 \right) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{32}{3} u^2$$

2. Hallar el área de la región del plano encerrada por la curva y = ln x entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa x = e.



En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje de abscisas.

$$ln\,x = 0 \qquad e^0 = 1 \qquad (1,0)$$

$$\int_1^e ln\,xdx$$

$$v = \ln x \xrightarrow{derivar} v' = \frac{1}{x}$$

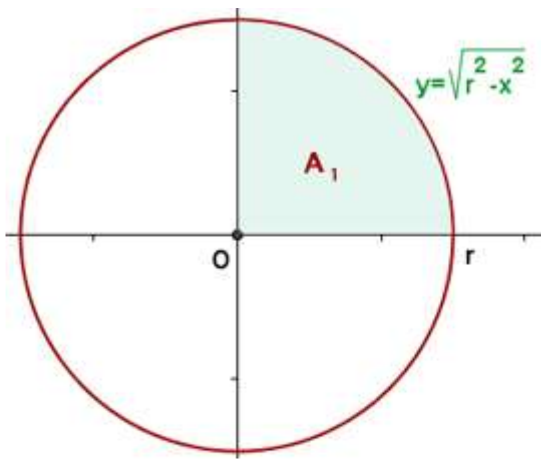
$$v' = 1 \xrightarrow{integrar} v = x$$

$$\int ln\,xdx = x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x + C$$

$$\int_1^e ln\,xdx = \left[x(ln\,x - 1)\right]_1^e = 0 + 1 = 1u^2$$

2. Calcular el área del círculo de radio r.

Partimos de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.



El área del círculo es cuatro veces el área del primer cuadrante.

$$A_1 = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Calculamos la integral indefinida por cambio de variable.

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$
$$x = rsent$$
$$dx = r\cos t dt$$

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{r^2 - r^2 sen t r \cos t}\,dt = \int \sqrt{r^2\left(1 - sen^2 t\right)}\,r\cos t dt =$$
$$= \int r^2 \cos^2 t dt = r^2 \int \cos^2 t dt = r^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = r^2\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} sen^2 2t\right] + C$$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$$x = 0 \qquad 0 = rsent \qquad sent = 0 \qquad t = 0$$

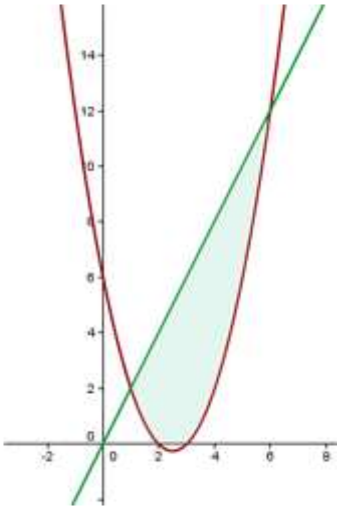
$$x = r \qquad r = rsent \qquad sent = 1 \qquad t = \frac{\pi}{2}$$

$$A_1 = r^2\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} sen^2 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}\pi r^2$$
$$A = 4A_1 = \pi r^2$$

3. Calcular el área limitada por la curva y = x^2 -5x + 6 y la recta y = 2x.

En primer lugar hallamos los puntos de corte de las dos funciones para conocer los límites de integración.

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 2x \end{cases} \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 6$$



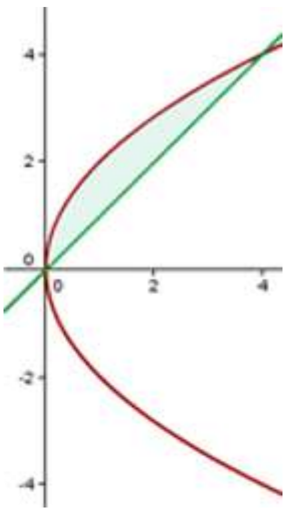
De x = 1 a x = 6, la recta queda por encima de la parábola.

$$A=\int_1^6\left(2x-x^2+5x-6\right)dx=\int_1^6\left(-x^2+7x-6\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{6}-6x\right]_1^6=$$

$$=\left(-\frac{6^3}{3}+\frac{(7)6^2}{2}-36\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-6\right)=\frac{125}{6}u^2$$

4. Calcular el área limitada por la parábola y^2 = 4x y la recta y = x.

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x \end{cases} \qquad y^2=4y \qquad (0,0) \qquad (4,0)$$



De x = o a x = 4, la parábola queda por encima de la recta.

$$A = \int_0^4 \sqrt{4x}dx - \int_0^4 xdx = \int_0^4 \left(\sqrt{4x} - x\right)dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{8}{3}u^2$$

5 . Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones 3y =x² e y = −x² + 4x.

En primer lugar representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

$$y = \frac{x^2}{3}$$

$$x_v = 0 \qquad y_v = 0 \qquad V(0,0)$$

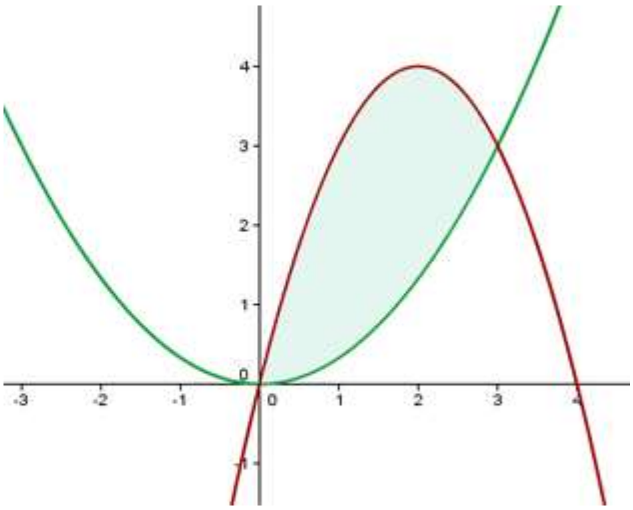
$$y = -x^2 + 4x$$

$$x_v = -\frac{4}{-2} = 2 \qquad y_v = 4 \qquad V(2,4)$$

$$-x^2 + 4x = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$$

Hallamos también los puntos de corte de las funciones, que nos darán los límites de integración.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{3} \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} \qquad (0,0) \qquad (3,3)$$



$$A = \int_0^3 \left(-x^2 + 4x - \frac{x^2}{3}\right)dx = \int_0^3 \left(-\frac{4}{3}x^2 + 4x\right)dx =$$

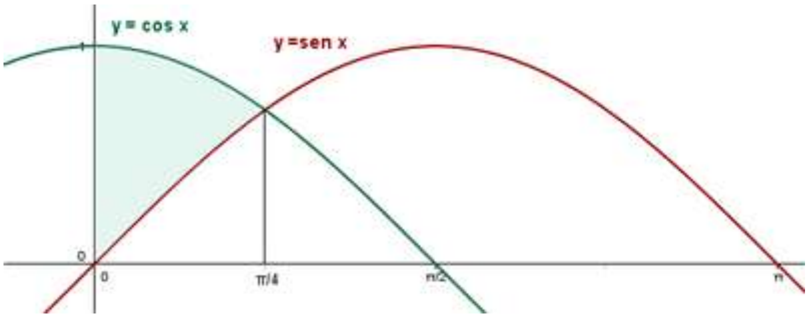
$$= \left[-\frac{4}{9}x^3 + 2x^2\right]_0^3 = -12 + 18 = 6u^2$$

6. Hallar el área de de la región limitada por las funciones:

y = sen x, y = cos x, x = 0.

En primer lugar hallamos el punto de intersección de las funciones:

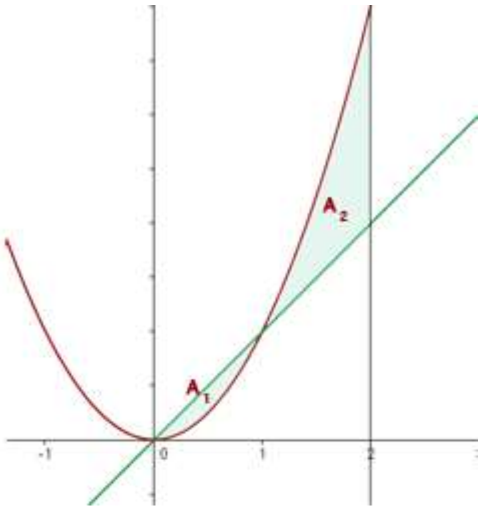
$$\begin{cases} y = sen x \\ y = \cos x \end{cases} \qquad sen x = \cos x \qquad x = \frac{\pi}{4}$$



Hallar el área de la figura limitada por: y = x^2, y = x, x = 0, x = 2

Puntos de corte de la parábola y la recta y = x.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad x^2 = x \qquad x = 0 \qquad x = 1$$



De x = 0 a x = 1, la recta queda por encima de la parábola.

$$A_1 = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} u^2$$

De x = 1 a x = 2, la recta queda por debajo de la parábola.

$$A_2 = \int_1^2 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6} u^2$$

$$A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1 u^2$$

7. Hallar el área del recinto plano y limitado por la parábola y = 4x − x^2 y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje OX.

Puntos de intersección:

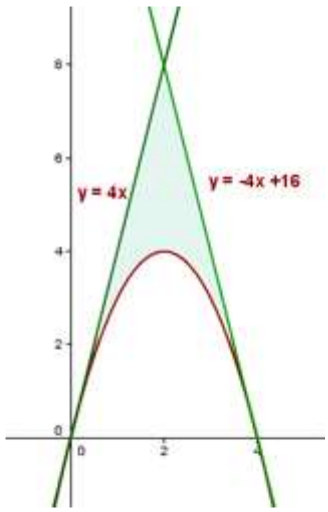
$$4x - x^2 = 0 \qquad x(4 - x) = 0 \qquad (0{,}0) \qquad (4{,}0)$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (0, 0):

$$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(0) = 4$$
$$y - 0 = 4(x - 0) \qquad y = 4x$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (4, 0):

$$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(4) = -4$$
$$y - 0 = 4(x - 4) \qquad y = -4x + 16$$



$$A = \int_0^2 \left[4x - \left(4x - x^2\right)\right] dx + \int_2^4 \left[(-4x + 16) - \left(4x - x^2\right)\right] dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x\right]_2^4 = \frac{16}{3} u^2$$

Si la función es negativa

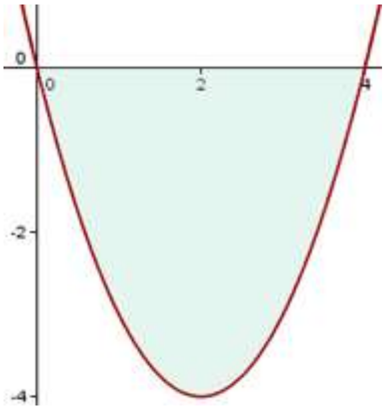
Si la función es negativa en un intervalo [a, b] entonces la gráfica de la función está por debajo del eje de abscisas. El **área de la función** viene dada por un viene dada por:

$$A = -\int_a^b f(x)dx \qquad\qquad A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

Ejemplos

1. Calcular el área del recinto limitado por la curva y = x^2 − 4x y el eje OX.

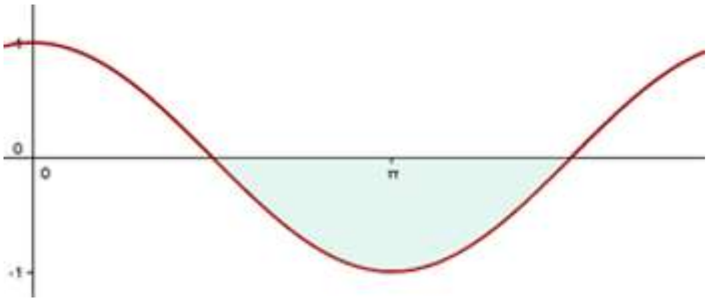
$$0 = x^2 - 4x \qquad x = 0 \qquad x = 4$$



$$A = \int_0^4 \left(x^2 - 4x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4 = -\frac{32}{3}$$

$$|A| = \frac{32}{3}u^2$$

2. Hallar el área limitada por la curva y = cos x y el eje Ox entre π/2 y 3π/2.



$$A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx=[senx]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=sen\frac{3\pi}{2}-sen\frac{\pi}{2}=-1-1=-2$$

$$|A|=2u^2$$

<u>Si la función toma valores positivos y negativos</u>

En ese caso el recinto tiene zonas por encima y por debajo del eje de abscisas. Para calcular el **área de la función** seguiremos los siguientes pasos:

1º Se calculan los puntos de corte con el eje OX, haciendo f(x) = 0 y resolviendo la ecuación.

2º Se ordenan de menor a mayor las raíces, que serán los límites de integración.

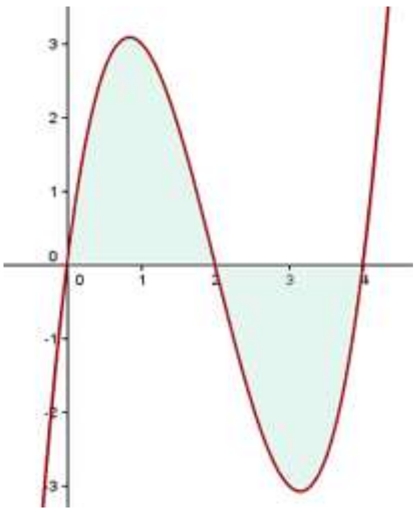
3º El **área** es igual a la **suma de las integrales definidas** en valor absoluto de cada intervalo.

Ejemplos

1. Calcular el área de las regiones del plano limitada por la curva f(x) = $x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

$$x^3-6x^2+8x=0 \qquad x\left(x^2-6x+8\right)=0$$

$$x=0 \qquad x=2 \qquad x=4$$



$$A=\int_0^2\left(x^3-6x^2+8x\right)dx+\left|\int_2^4\left(x^3-6x^2+8x\right)dx\right|$$

El área, por razones de simetría, se puede escribir:

$$A = 2\int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 8u^2$$

4. Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas y= $x^2 - 2x$, y = $-x^2 + 4x$.

Representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

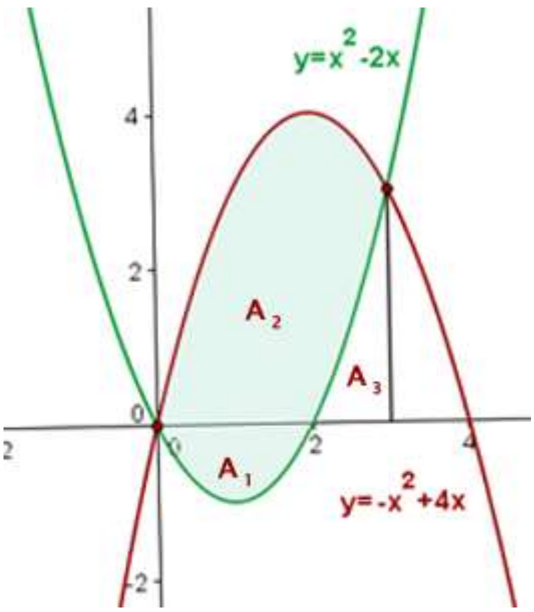
$$x_v = \frac{2}{2} = 1 \qquad y_v = 1^2 - 2 \bullet 1 = -1 \qquad V(1,-1)$$

$$0 = x^2 - 2x \qquad 0 = x(x-2) \qquad (0,0) \qquad (2,0)$$

$$x_v = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad y_v = -2^2 + 4 \bullet 2 = 4 \qquad V(2,-4)$$

$$0 = -x^2 + 4x \qquad 0 = x(-x+4) \qquad (0,0) \qquad (4,0)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} \qquad x^2 - 2x = -x^2 + 4x \qquad (0,0) \qquad (3,3)$$



$$A_1 = \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3} \qquad |A_1| = \frac{4}{3} u^2$$

$$A_2 = \int_0^3 \left(-x^2 + 4x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9 \qquad A_2 = 9u^2$$

$$A_3 = \int_2^3 \left(x^2 - 2x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3} \qquad A_3 = \frac{4}{3} u^2$$

$$A = |A_1| + A_2 - A_3 \qquad A = \frac{4}{3} + 9 - \frac{4}{3} = 9u^2$$

Ejercicios no Resueltos

1. Hallar el área limitada por la recta x + y = 10, el eje OX y las ordenadas de x = 2 y x = 8.

2. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

3. Calcular el área del triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0).

4. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $y^2 = 4x$ e $y = x^2$.

5. Calcular el área limitada por la curva xy = 36, el eje OX y las rectas: x = 6, x = 12.

6. Calcular el área limitada por la curva $y = 2(1 - x^2)$ y la recta y = −1.

7. Calcular el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta que pasa por los puntos (−1, 0) y (1, 4).

8. Hallar el área limitada por la recta $y = \frac{3x - 6}{2}$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a x = 0 y x = 4.

9. Calcular el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de abscisas.

10. Hallar el área de la región del plano limitada por las curvas $y = ln\, x$, y = 2 y los ejes coordenados.

11. Calcular el área de la región del plano limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

12. Hallar el área de una elipse de semiejes a y b.

13. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva: $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ y el eje OX.

14. Hallar el área de la figura limitada por: $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$

15. Hallar el área del recinto plano y limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje OX.

Calculo del volumen de revolución

Ejercicios Resueltos

1. Hallar el volumen engendrado por las superficies limitadas por las curvas y las rectas dadas al girar en torno al eje OX:

$$y = sen x, \quad x = 0, \quad x = \pi$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} sen^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\left[\frac{1}{2} (1 - cos\, 2x) \right] \right) dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} sen 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} u^3$$

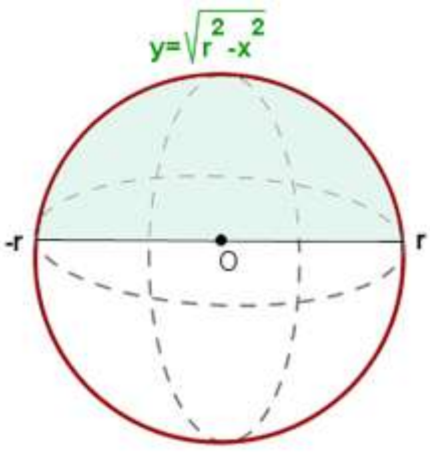
2. Calcular el volumen del cilindro engendrado por el rectángulo limitado por las rectas $y = 2$, $x = 1$ y $x = 4$, y el eje OX al girar alrededor de este eje.

$$V = \pi \int_1^4 2^2 dx = 4\pi [x]_1^4 = 4\pi (4 - 1) = 12\pi u^3$$

3. Calcular el volumen de la esfera de radio r.

Partimos de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

Girando un semicírculo en torno al eje de abscisas se obtiene una esfera.



$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\,dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)\,dx=$$

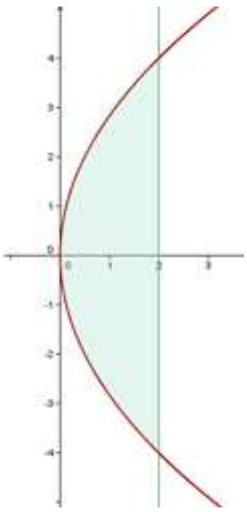
$$=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\pi\left(\frac{2r^3}{3}+\frac{2r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

4. Calcular el volumen engendrado por la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 2$, alrededor del eje OY.

Como gira alrededor del eje OY, aplicamos:

$$V=\pi\int_a^b x^2dy$$

El volumen será la diferencia del engendrado por la recta y el engendrado por la parábola entre los extremos $y = -4$ e $y = 4$.



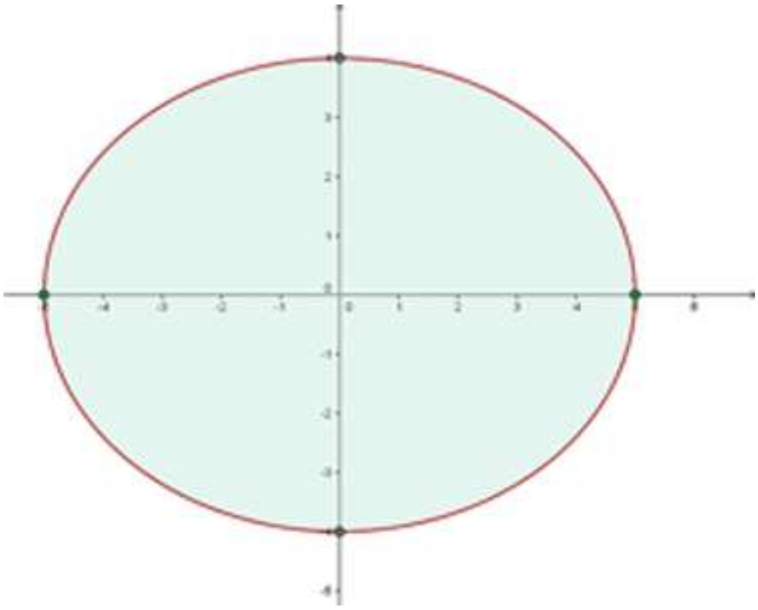
Como la parábola es simétrica con respecto al eje OX, el volumen es igual a dos veces el volumen engendrado entre $y = 0$ e $y = 4$.

$$V=2\pi\int_0^4 2^2\,dy-2\pi\int_0^4\left(\frac{y^2}{8}\right)^2dy=2\pi\left[4y-\frac{y^5}{320}\right]_0^4=\frac{128}{5}u^3$$

5. Hallar el volumen del elipsoide engendrado por la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, al girar:

1 Alrededor de su eje mayor.

2 Alrededor de su eje menor.



Como la elipse es simétrica al respecto de los dos ejes el volumen es el doble del engendrado por la porción de elipse del primer cuadrante en ambos casos.

$$16x^2+25y^2=400 \qquad y^2=\frac{400-16x^2}{25} \qquad (5,0)$$

$$V_1=2\pi\int_0^5\left(\frac{400-16x^2}{25}\right)dx=2\pi\left[16x-\frac{16}{75}x^3\right]_0^5=\frac{320}{3}\pi u^3$$

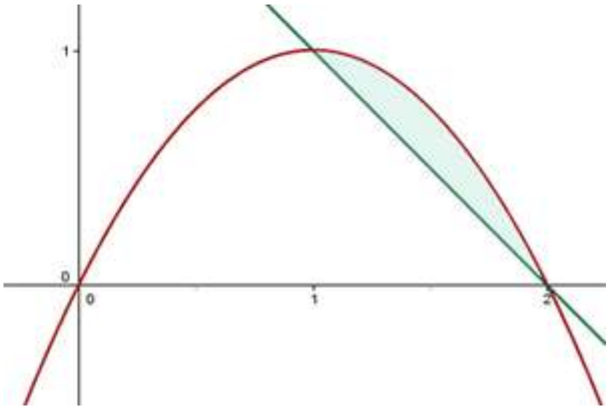
$$16x^2+25y^2=400 \qquad y^2=\frac{400-25y^2}{16} \qquad (0,4)$$

$$V_2=2\pi\int_0^4\left(\frac{400-25y^2}{16}\right)dy=2\pi\left[25y-\frac{25}{48}y^3\right]_0^5=\frac{400}{3}\pi u^3$$

6. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de y = 2x −x^2, y = −x + 2.

Puntos de intersección entre la parábola y la recta:

$$\begin{cases} y=2x-x^2 \\ y=-x+2 \end{cases} \qquad 2x-x^2=-x+2 \qquad (1,1) \qquad (2,0)$$



La parábola está por encima de la recta en el intervalo de integración.

$$V=\pi\int_1^2\left[\left(2x-x^2\right)^2-(-x+2)^2\right]dx=\pi\int_1^2\left(x^4-4x^3+3x^2+4x-4\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+x^3+2x^2-4x\right]_1^2=\frac{\pi}{5}u^3$$

Ejercicios no Resueltos

1. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor OX del área limitada por y = 6 − x, y = 0, x = 0, x = 4.

2. Calcular el volumen que engendra un triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0) al girar 360° alrededor del eje OX.

3. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio que limita el eje de abscisas, la recta y = x + 2 y las coordenadas correspondientes a x = 4 y x = 10, al girar alrededor de OX.

4. Calcular el volumen engendrado por una semionda de la sinusoide y = sen x, al girar alrededor del eje OX.

5. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

6. Hallar el volumen del cuerpo revolución engendrado al girar alrededor del eje OX, la región determinada por la función f(x) = 1/2 + cos x, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = π.

7. Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 6x - x^2$, $y = x$.

8. Hallar el volumen engendrado por el círculo $x^2 + y^2 - 4x = -3$ al girar alrededor del eje OX.

9. Hallar el volumen de la figura engendrada al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alrededor del eje OX.

Calculo de la longitud de una cuerda

Ejercicios Resueltos

1. Hallar la **longitud del arco** de curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo [0, 1].

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$$

$$1+\frac{9}{4}x = t^2$$

$$\frac{9}{4}dx = 2tdt \qquad dx = \frac{8}{9}tdt$$

$$x = 0 \qquad t = 1$$

$$x = 1 \qquad t = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$L = \int_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} t\frac{8}{9}tdt = \frac{8}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right) \qquad \text{U.L.}$$

Ejercicios no Resueltos

1. Encuentre la longitud de una curva $y^2=(2x-1)^3$ interceptada por la recta x=5 R=54,56 U.L.

2. Calcular la longitud de la circunferencia de radio r=4 R=8π U.L.

3. Calcular la longitud del arco $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ *entre* $-1\le x\le 1$ $R=(e-e^{-1})$ *U.L.*

Calculo de área de revolución

1. Hallar el área de revolución al girar sobre el eje el segmento de recta $y = 1.x \ \ entre \ \ x = 0\, y\, x = 1$ $\qquad R = \frac{\pi}{6}(3\sqrt{5} - 1) \ \ U.A.$

2. Calcular el área de revolución de la esfera de radio r $R = 4\pi r^2 \qquad U.A.$

3. Calcular el área de revolución de la superficie generada al rotar el arco de curva

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad alrededor \ del \ eje \ x \ entre \ -1 \leq x \leq 1 \qquad R = 2\pi(\frac{e^2 - e^{-2}}{4} - 1) = 5{,}6268\pi U.A.$$

Aplicaciones físicas, mecánicas, química

1. La integral que se aplica para resolver el problema de la caída libre de un cuerpo sometido a la gravedad de la tierra. En la Tierra, la aceleración de la gravedad es aproximadamente *g* = 9,81 m/s². Por lo tanto un cuerpo que cae libremente empezando su caída con velocidad nula tiene una velocidad que viene dada por la siguiente función:

$$v = -g \cdot t$$

El signo negativo es debido a que la gravedad es hacia el centro de la tierra y los sistemas de referencia normalmente se eligen de forma que la dirección positiva es hacia arriba.

Si se quiere saber la distancia que ha recorrido el cuerpo durante un tiempo dado T se puede razonar que en torno a cada instante t la velocidad es constante salvo variaciones infinitesimales, por lo tanto el espacio recorrido en este instante durante un periodo de tiempo infinitesimal dt es v(t)dt, la suma de todos los espacios recorridos durante todos los instantes desde t=0 hasta t=T (el momento en que se quiere saber la distancia recorrida) y se calcula con la integral:

$$l = \int_0^T (-g \cdot t dt)$$

El resultado de esta integral es:

$$l = -\left(\frac{g}{2} \cdot T^2\right)$$

2. En mecánica clásica la energía cinética se puede calcular a partir de la ecuación del trabajo y la expresión de una fuerza *F* dada por la segunda ley de Newton:

$$E_c = W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \frac{1}{2}mv^2$$

3. El trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento elemental de la partícula sobre la que está aplicada es una magnitud escalar, que podrá ser positiva, nula o negativa

Si la partícula P recorre una cierta trayectoria en el espacio, su desplazamiento total entre dos posiciones A y B puede considerarse como el resultado de sumar infinitos desplazamientos elementales $\mathrm{d}\mathbf{r}$ y el trabajo total realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ en ese desplazamiento será la suma de todos esos trabajos elementales; o sea

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

si consideramos un fluido que se encuentra sometido a una presión externa p_{ext} y que evoluciona desde un estado caracterizado por un volumen V_1 a otro con un volumen V_2, el trabajo realizado será:

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p_{\text{ext}} \mathrm{d}V$$

En un proceso cuasiestático y sin fricción la presión exterior (p_{ext}) será igual en cada instante a la presión (p) del fluido, de modo que el trabajo intercambiado por el sistema en estos procesos se expresa como

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$

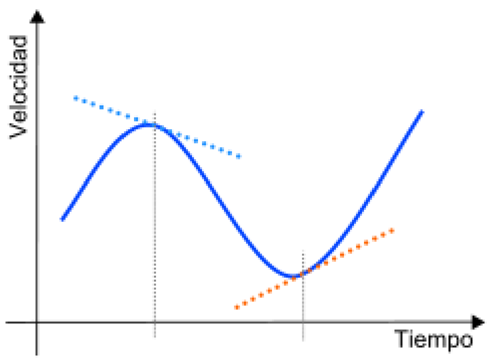
En el caso que la presión del sistema permanezca constante durante el proceso, el trabajo viene dado por:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = p\int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$$

4. Se puede definir la velocidad instantánea a partir de la aceleración como:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t \qquad \mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}dt + \mathbf{v}_0$$

5. Movimiento rectilíneo acelerado



En el Movimiento Rectilíneo Acelerado, la aceleración instantánea queda representada como la pendiente de la recta tangente a la curva que representa gráficamente la función *v*(*t*).

Si se aplican las fórmulas anteriores al movimiento rectilíneo, en el que sólo existe aceleración tangencial, al estar todos los vectores contenidos en la trayectoria, podemos prescindir de la notación vectorial y escribir simplemente:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

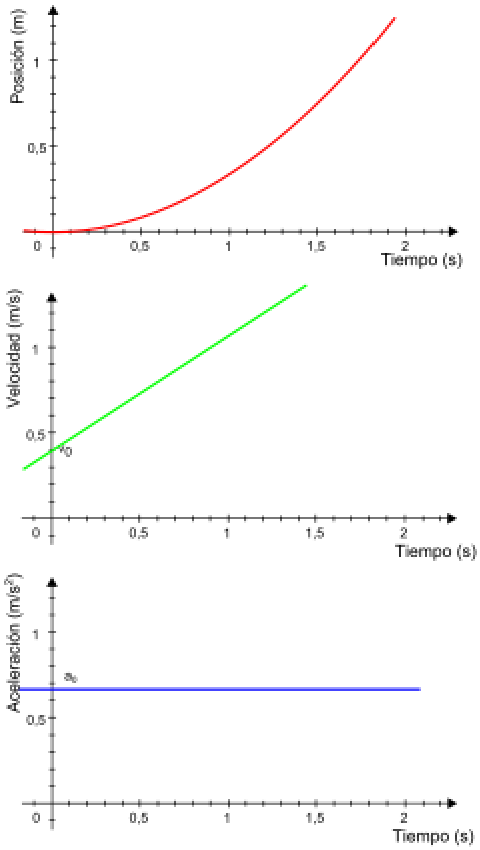
Ya que en ese tipo de movimiento los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, satisfaciendo también la relación:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau)\, d\tau$$

Las coordenadas de posición vienen dadas en este caso por:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t (t-\tau) a(\tau)\, d\tau$$

6. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado



Variación en el tiempo de la posición, la velocidad y la aceleración en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

En éste movimiento la aceleración es constante, por lo que la velocidad de móvil varía linealmente y la posición cuadráticamente con tiempo. Las ecuaciones que rigen este movimiento son las siguientes:

$$a = a_0 = \text{const.}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt \Rightarrow v = v_0 + at$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)\,dt \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

7. Dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, el momento de inercia del mismo se define como la suma de los productos de las masas de las partículas por el

cuadrado de la distancia *r* de cada partícula a dicho eje. Matemáticamente se expresa como:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Para un cuerpo de masa continua, se generaliza como:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2\, dV$$

En un campo **gravitatorio uniforme**, es decir, uno en que el vector de campo gravitatorio $\mathbf{g}$ es el mismo en todos los puntos, la definición anterior se reduce a la definición del centro de masas:

$$\mathbf{r}_{\text{c.m.}} = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r}) dV$$

Ejercicios Calculo Momento de Inercia

1. Calcular el Momento de Inercia del cuerpo de revolución de densidad ρ engendrado por $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$ al girar alrededor del eje x entre x=0 y x=8

$I = \frac{\pi\rho}{2} \int_0^8 (\frac{\sqrt{x}}{2})^4\, dx$ $\qquad R = \frac{16\pi\rho}{3}$

2. Ídem $y = x^2 + 3, \quad x = -2\ y\ x = 2$ $\qquad R = \frac{45758}{63}\pi\rho$

3. Ídem $y = \sqrt{4x}\ \ entre\ \ x = 0\ \ y\ \ \ x = 4$ $\qquad R = \frac{512}{3}\pi\rho.$

Ejercicios Cálculo de trabajo

1. Hallar el trabajo realizado al estirar 8 cm. Un resorte helicoidal suponiendo una fuerza de 50 kg para estirarlo 2 cm.

F=kx si F=50 kg entonces k=50/2=25

$\int^8 25xdx = 8\ J.$

2. Un cilindro provisto de un émbolo móvil se halla encerrado un gas. Partiendo de la Ley de Boyle, pv=k, hallar el trabajo realizado por la presión del gas al empujar el {embolo para comprimir 1640 cm3 (a la presión atmosférica) al volumen de 164 cm3 R= 39 J.
3. Un acuario tiene base rectangular de 0,6 m de ancho y 1,2 m de largo y lados rectos de 0,9 m de altura. Si el acuario está lleno de agua, cuanto trabajo se necesita para vaciarlo bombeando el agua por la parte superior. $R = 2{,}916x10^4\ \ J$

4. Hallar la presión ejercida por el agua sobre un semicírculo cuyo radio es de rm situado en un plano vertical y cuyo diámetro horizontal coincide con la superficie libre del líquido. $R=\frac{250}{3}\rho \quad Pa$

Ejercicios Calculo Cinemática

1. Un cuerpo se mueve a lo largo de una line recta de acurdo a la ley $v=t^3-t^2+5$ m/s. Si en el instante $t_0=2s \quad x_0=4m$ Determinar la posición del móvil en cualquier instante. $R \quad x=\frac{t^4}{4}-\frac{4}{3}t^3+5t \; m$
2. La aceleración de un cuerpo que se mueve a lo largo de una línea recta es $a=4-t^2 \quad m/s^2$. Si en el instante $t_0=3 \; v_0=2 \; m/s$. Determinar la velocidad del móvil en cualquier instante. $R \quad v=4t-\frac{t^3}{3}+1 \; m/s$

Ejercicios de Química

Reacciones de primer orden $V=-\frac{d[A]}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d[A]}{dt}=kA$

V=Velocidad de desaparición de la sustancia A

$$-\int_{A_0}^{A_t}\frac{dA}{A}=\int_0^t kdt \qquad \Rightarrow \qquad [LnA]_{A_0}^{A_t}=-[kt]_0^t \quad \Rightarrow Ln\frac{A_t}{A_0}=-kt$$

1. La descomposición del peróxido de hidrógeno en presencia del ión hidróxido es reacción de primer grado y posee una constante de velocidad $k=i{,}08x10^3$ a la temperatura de 22° C. Partiendo de una concentración inicial igual o,42 M., determinar:
   a) Cuál es la concentración H_2O_2 después de 2 horas y media.
   b) El tiempo necesario para que la concentración de H_2O_2 alcance el valor 0,18 M.
   c) Cuanto tiempo tarde en descomponerse el 85 % del reactivo inicial.

   R= a) $A_t=e^{-1{,}029}$ b) $784{,}5\min$ c) 175,65 min.

INTEGRALES IMPROPIAS

Ejercicios Resueltos

Ejemplo 1

Evalúe $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

Solución:

Si existe $\int_t^b f(x)dx$ para todo número $t \le b$, entonces

$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$ siempre que haya este límite (como un número finito)

Las integrales impropias de $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ se llaman **convergentes** si hay tal límite y **divergentes** si no existe.

Tenemos que:

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x dx$$

Integramos por partes, haciendo $u = x, dv = e^x dx$, de modo que $du = dx$ y $v = e^x$:

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

Sabemos que $e^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$, de acuerdo con la regla de l'Hopital

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\left(-e^t\right) = 0$$

Por consiguiente

$$\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim_{t\to-\infty}\left(-te^t - 1 + e^t\right) = -0 - 1 + 0 = -1$$

Ejemplo 2

Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

Solución: Conviene elegir $a = 0$ en la definición 1 (c):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

Ahora debemos evaluar por separado las integrales del lado derecho:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t - \tan^{-1}0\right) = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

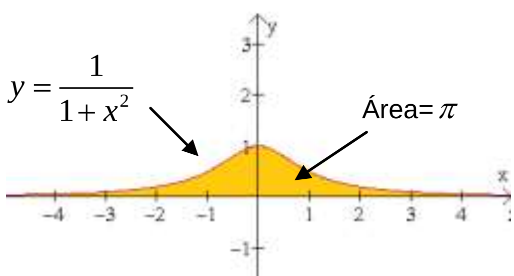
$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como ambos son convergentes, la integral original es convergente y

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

En vista de que $1/\left(1+x^2\right) > 0$, la integral impropia dada se puede interpretar como el área de la región infinita bajo la curva $y = 1/\left(1+x^2\right)$ y arriba del eje x.



Ejemplo 3

¿Para qué valores de p la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ es convergente?

Solución: sabemos que si $p=1$, la integral es divergente, así que supongamos que $p \neq 1$. Entonces

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^p}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}}-1\right]$$

Si $p>1$, entonces $p-1>0$, y así $t\to\infty, t^{p-1}\to\infty$ cuando $1/t^{p-1}\to 0$. Por lo tanto,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1} \text{ si } p>1$$

Y la integral converge. Pero si $p<1$. Pero si $p<1$, entonces $p-1<0$ y así $\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty$ cuando $t\to\infty$ y la integral diverge.

Resumiremos el resultado del ejemplo 3 como referencia para el futuro:

Integrando discontinuos

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ es convergente si $p>1$, y diverge si $p\leq 1$

Ejemplo 4

Indique si $\int_0^{\pi/2} \sec x dx$ converge o diverge.

Solución: notará que la integral dada es impropia pues $\lim_{x\to(\pi/2)} \sec x = \infty$. Al emplear el inciso (a) de la definición 3 tenemos que

$$\int_0^{\pi/2} \sec x dx = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\int_0^t \sec x dx$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left[\ln\left(\sec t+\tan t\right)-\ln 1\right]=\infty$$

Ya que $\sec t\to\infty$ y $\tan\to\infty$ cuando $t\to\left(\pi/2\right)^-$; así pues, la integral impropia original es divergente.

Ejemplo 5

Evalúe $\int_0^1 \ln x dx$

Solución: Sabemos que la función $f(x)=\ln x$ tiene una asíntota vertical en 0 porque $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; por lo tanto, la integral dada es impropia y entonces

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x dx$$

Ahora integramos por partes, con $u=\ln x$, $dv=dx, du=dx/x$ y $v=x$:

$$\int_t^1 \ln x dx = x\ln x]_t^1 - \int_t^1 dx$$

$$=1\ln 1 - t\ln t - (1-t)$$

$$=-t\ln t - 1 + t$$

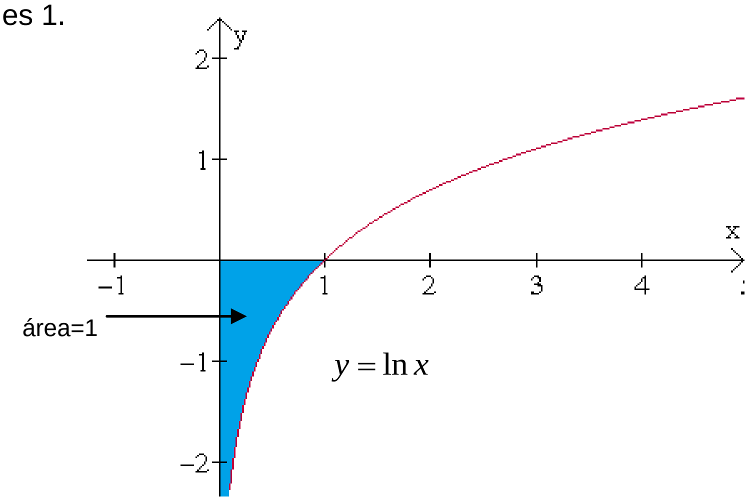
Para determinar el límite del primer término, aplicamos la regla del l'Hopital:

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+}(-t) = 0$$

Por consiguiente, $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t - 1 + t)$

$$=-0-1+0=-1$$

Interpretación geométrica de este resultado. El área de la región sombreada sobre $y=\ln x$ y abajo del eje x es 1.



Ejercicios

Integral	Respuesta
1) $\int_1^\infty \frac{1}{(3x+1)^2}dx$	$\frac{1}{12}$
2) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}}dw$	D.
3) $\int_0^\infty e^{-x}dx$	1
4) $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx$	D.
5) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}dx$	0
6) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$	$-\ln\frac{2}{3}$
7) $\int_0^\infty \cos dx$	D.

8) $\int_{-\infty}^{1} xe^{2x}dx$ $\quad$ $e^2/4$

9) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ $\quad$ D.

10) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ $\quad$ D.

11) $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$ $\quad$ 1

12) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $\quad$ $2\sqrt{3}$

13) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx$ $\quad$ D.

14) $\int_{0}^{\pi/4} \csc^2 t dt$ $\quad$ D.

15) $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}dx$ $\quad$ D.

16) $\int_{0}^{\pi} \sec x dx$ $\quad$ D.

17) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-1}dx$ $\quad$ D.

18) $\int_{0}^{2} z^2 \ln z dz$ $\quad$ $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}$

19) Hallar valores de α para que la integral converge o diverge

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{d\alpha}{x^{\alpha}} \ / \alpha \neq 1$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{d\alpha}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{(1-\alpha)}(b^{1-\alpha}-1)$$

$\alpha > 1 \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{d\alpha}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}$ Integral Converge

$\alpha < 1 \qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{d\alpha}{x^{\alpha}} = \infty$ Integral Diverge

20)

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ Integral Converge