Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Departamento Ingreso

Ciclo de Introducción a los Estudios Universitarios

Matemática

Autores:

Prof. Mg. Ing. Jorge Alberto Azpilicueta
Prof. Ing. Laura Vargas
Prof. Ing. Héctor Gabriel Tavella
Prof. Esp. Ing. Pablo Bobatto
Prof. Ing. José Luis Galopo
Prof. Dra Claudia M. Egea

Edición 2024

0

Objetivos Generales

Al finalizar el estudio de Matemática del Ciclo de Nivelación usted deberá ser capaz de:

1. **Utilizar una metodología adecuada para el estudio de la Matemática.**

2. **Alcanzar destreza operativa en temas básicos de Álgebra y Trigonometría como aplicación de conceptos teóricos.**

3. **Resolver problemas con procedimientos específicos**

Esquema Conceptual

NUMEROS REALES Y COMPLEJOS

↓

POLINOMIOS

↓

FUNCIONES

↓

ECUACIONES

↓

TRIGONOMETRÍA

<u>Unidad 1</u>. Números Reales y Complejos

1.1 Los números reales, operaciones y propiedades. Potencias y raíces de números reales.

1.2 Números complejos, operaciones en forma binómica.

<u>Unidad 2</u>. Polinomios

2.1 Polinomios. Grado. Operaciones con polinomios. Adición, multiplicación y división.

2.2 Divisibilidad. Valuación. Teorema del resto.

2.3 Raíz de un polinomio. Orden de multiplicidad. Descomposición factorial de un polinomio.

<u>Unidad 3</u>. Funciones

3.1 Conjuntos y subconjuntos. Operaciones con conjuntos. Par ordenado. Producto Cartesiano.

3.2 Correspondencia entre puntos de la recta y números reales. Pares ordenados de números reales. Conjuntos de puntos. Intervalos.

3.3 Relación y sus representaciones. Funciones. Definición. Funciones enteras de primer y segundo grado.

<u>Unidad 4</u>. Ecuaciones.

4.1 Ecuación de primer grado con una y dos incógnitas.

4.2 Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

4.3 Ecuación de segundo grado con una incógnita.

4.4 Sistemas mixtos. Método de sustitución.

<u>Unidad 5</u>. Trigonometría

5.1 Longitud de un arco de circunferencia. Ángulos y su medición.

5.2 Funciones trigonométricas. Relaciones fundamentales.

5.3 Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

5.4 Fórmulas de adición.

Bibliografía

Como bibliografía se aconseja utilizar los textos de estudio del secundario, sin destacar ninguno en particular.

Orientación del Aprendizaje

Esta guía de enseñanza presenta los conceptos básicos del número real y del número complejo, sus operaciones y propiedades básicas. Considera los polinomios como entes abstractos y estudia sus operaciones y propiedades. Previo a la definición de función se estudian los conjuntos y sus propiedades. Hace hincapié en las funciones polinómicas de primer y segundo grado y en las funciones exponencial y logarítmica. Plantea la resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, y de segundo grado con una incógnita. Estudia, también, la resolución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y de sistemas mixtos. Desarrolla, en trigonometría, resolución de triángulos e identidades trigonométricas fundamentales. En cada caso se plantea una introducción teórica al tema, el desarrollo de ejemplos y la ejercitación correspondiente.

El alumno deberá utilizar, además de esta guía, los textos específicos de Matemática que estudió en la escuela media, a fin de reforzar el aprendizaje.

Recuerde

> *"... la ciencia matemática no es el fruto de la contemplación, no es descriptiva en ninguna de sus partes, es una actividad humana reducida a sus elementos intelectuales esenciales. Comprender un resultado matemático es saber utilizarlo. Conocer una teoría matemática es saber reconstruirla como si fuera su creador. Aprender una demostración de memoria sin comprenderla es una proeza que intentan algunos valientes ingenuos, pero es la que nunca he visto triunfar..."*

Matemática Moderna. Matemática Viva, de A. Revuz.

Por ello es recomendable estudiar Matemática teniendo a mano abundante papel borrador y lápiz.

En consecuencia:

1. **Lea la introducción teórica tratando de comprenderla.**
2. **Aclare los conceptos desarrollando personalmente los ejemplos.**
3. **Realice la ejercitación correspondiente. Si tiene dificultades, repita los puntos 1 y 2.**
4. **Si no tiene éxito, no desespere, solicite ayuda al docente.**

1

Números reales y números complejos

Objetivos

Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- **Identificar números naturales, enteros, racionales, irracionales y complejos.**
- **Operar con números reales y complejos utilizando sus propiedades.**

Contenidos

1.1 Números reales. Operaciones y propiedades. Potencias y raíces de números reales.
1.2 Números complejos. Operaciones en forma binómica.

Esquema conceptual

SISTEMA NUMÉRICO

↓

NÚMEROS REALES

↓

NÚMEROS COMPLEJOS

↓

ÁLGEBRA

Introducción

En esta unidad se revisan los conceptos necesarios para trabajar las principales operaciones en el campo de los números reales y complejos, que ya se han visto en cursos de la escuela media.

Orientación del aprendizaje

Lea la introducción teórica de cada tema y desarrolle personalmente los ejemplos que le siguen. Realice la ejercitación correspondiente.

Bibliografía de la unidad

Como bibliografía se aconseja utilizar los textos de estudio del secundario, sin destacar ninguno en particular.

Aprender a calcular con exactitud, operar símbolos con facilidad y aplicar con seguridad las propiedades de los números reales y complejos es un objetivo fundamental para el estudiante de Ciencias Naturales y de Ingeniería.

Contenidos

I. Números reales. Operaciones y Propiedades.

Los procedimientos cuantitativos básicos de la ciencia comprenden las operaciones de contar y medir. Contar significa caracterizar una colección o conjunto de objetos mediante un número, en tanto que medir es asignar un número a alguna propiedad de un objeto. Las nociones de “contar” y “medir”, al igual que la de conjunto, distan de ser conceptos simples. Cada una de estas nociones ha sido objeto de muchos estudios en el campo de la metodología científica. Lo importante para nosotros en el presente estudio es el hecho de que tanto “contar” como “medir” conducen a números, y mediante el uso de números y conjuntos es posible lograr una buena compresión de los fenómenos de la naturaleza.

En este capítulo repasaremos los diferentes conjuntos numéricos que conocemos, cómo se relacionan y cómo operar con ellos. Muchas de las operaciones y expresiones aquí mencionadas ya son conocidas por el lector pero resulta necesario repasarlas y analizarlas para introducir cierta notación y formalidad que usaremos luego en las materias de matemática más avanzada.

Históricamente, los conjuntos de números fueron creados para satisfacer diferentes necesidades. Los números naturales nos permiten contar, los enteros nos permiten describir temperaturas bajo cero o subsuelos en un edificio. Los racionales nos permiten describir partes de un todo, por ejemplo “dos tercios de una torta” y los irracionales nos permiten describir ciertas medidas por ejemplo la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a una unidad.

Repasemos estos conjuntos numéricos. Los naturales serán representados con la letra $\mathbb{N}$, escribimos

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

usaremos los tres puntos “…” para indicar que el conjunto continúa.

Los enteros serán representados con la letra $\mathbb{Z}$, escribimos

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

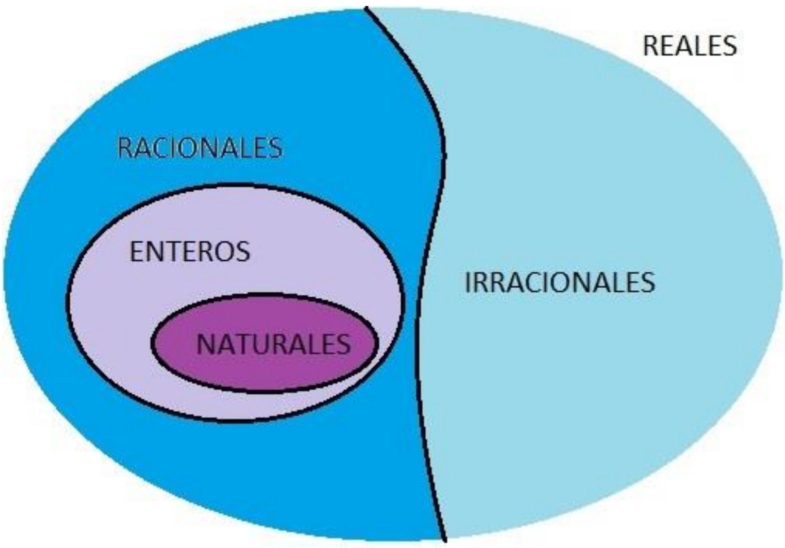
Los racionales serán representados con la letra $\mathbb{Q}$, y se obtienen al realizar cocientes de números enteros, por ejemplo $\frac{3}{4}$; $\frac{-7}{5}$; $\frac{8}{1} = 8$; $0{,}21 = \frac{21}{100}$

Escribimos

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{m}{n} : m, n \ son\ enteros\ y\ n \neq 0 \right\}$$

Los irracionales serán representados con la letra $\mathbb{I}$, y no se pueden expresar como cociente de números enteros, es decir tienen una representación decimal infinita no periódica, por ejemplo $\sqrt{2} = 1{,}41421356 \ldots$; $\sqrt{3} = 1{,}73205081 \ldots$; $e = 2{,}71828183 \ldots$; $\pi = 3{,}14159265 \ldots$

El conjunto de números reales será representado con la letra $\mathbb{R}$ y es la unión de los conjuntos racionales e irracionales. El siguiente diagrama muestra la relación entre los diferentes conjuntos numéricos:



1.1 Representación decimal de un número real

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, su representación decimal es finita o infinita periódica, por ejemplo

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}500000000 \ldots. = 0{,}5\hat{0} \ ;$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333333333 \ldots = 0{,}\hat{3}$$

$$\frac{9}{7} = 1{,}285714285714 \ldots = 1{,}\widehat{285714}$$

Como ya mencionamos, si el número es irracional su representación decimal es infinita no es periódica. Cuando consideramos finitos decimales de la expansión de un número irracional obtenemos una **aproximación** de dicho número. Por ejemplo, solemos decir $\sqrt{2} \approx 1,41$ para aproximar el número irracional $\sqrt{2}$ por el número racional 1,41.

En lo que sigue, recordemos cómo podemos obtener una fracción equivalente a un número decimal dado. Para simplificar el proceso consideraremos tres casos: decimal finito, decimal periódico puro, decimal periódico mixto.

<u>Caso 1: decimal finito.</u> Este es el caso de un número con finitos lugares después de la coma. Para expresar su fracción equivalente procedemos a colocar el número sin la coma en el numerador y en el denominador consideramos una potencia de 10 con tantos ceros como lugares después de la coma. Veamos algunos ejemplos:

$$0{,}5 = \frac{5}{10}; \qquad 2{,}04 = \frac{204}{100}\ ; \qquad 16{,}531 = \frac{16531}{1000}$$

Podemos luego simplificar las fracciones para obtener su expresión irreducible, en los ejemplos:

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \qquad 2{,}04 = \frac{204}{100} = \frac{51}{25}\ ; \qquad 16{,}531 = \frac{16531}{1000}$$

<u>Caso 2: decimal periódico puro</u>. Este es el caso de un número decimal con su parte periódica inmediatamente después de la coma, llamaremos **período** a la expresión que se repite. Para escribir la fracción equivalente procedemos a colocar en el numerador la resta del número completo (sin la coma y sin repeticiones) menos el valor **sin el período** y en el denominador un número formado con tantos 9 como cifras tenga el período. Analicemos algunos ejemplos:

$$0,\hat{3} = \frac{3}{9}; \qquad 2{,}6565\ldots = 2,\widehat{65} = \frac{265-2}{99} = \frac{263}{99}; \qquad 16,\widehat{15} = \frac{1615-16}{99} = \frac{1599}{99}$$

Nuevamente podemos simplificar las fracciones para obtener su expresión irreducible, en los ejemplos:

$$0,\hat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}; \qquad 2,\widehat{65} = \frac{263}{99}; \qquad 16,\widehat{15} = \frac{1599}{99} = \frac{533}{33}$$

<u>Caso 3: decimal periódico mixto.</u> En este caso, el número decimal tiene luego de la coma una parte no periódica que llamaremos **anteperíodo** y una parte periódica. Para escribirlo como fracción procedemos colocando el número completo (sin la coma y sin repeticiones) en el numerador y le restamos la parte sin el período, luego en el denominador colocamos tantos 9 como cifras tenga el período y tanto 0 como cifras tenga el anteperíodo. Por ejemplo:

$$1{,}36666666\ldots = 1,3\hat{6} = \frac{136-13}{90} = \frac{123}{90}$$

$$2{,}346565\ldots = 2,34\widehat{65} = \frac{23465-234}{9900} = \frac{23231}{9900}$$

Nuevamente simplificamos si fuera posible.

Por otro lado, para pasar una expresión **fraccionaria a decimal** sólo debemos realizar la división que dicha fracción representa.

1.2 Propiedades de las Operaciones con números reales

Desde edad temprana hemos aprendido a sumar y multiplicar números reales, y por experiencia conocemos algunas de las propiedades de estas operaciones. A continuación, vamos a enumerar dichas propiedades.

1) Propiedad **conmutativa**: no importa el orden en el cual se realice la suma o la multiplicación el resultado obtenido es el mismo. Enunciamos formalmente dicha propiedad de la siguiente manera:

Cualquiera sean los números reales a y b tenemos: $a + b = b + a$ y $a . b = b . a$,

2) Propiedad **asociativa**: si tenemos tres números, no importa cuales dos sumamos o multiplicamos primero. Formalmente:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ y $a . (b . c) = (a . b) . c$, cualesquiera sean a, b y c

3) Existencia del **neutro de la suma**: existe un elemento especial, el 0, que cumple que:

$a + 0 = a$, cualquiera sea a.

4) Existencia del **neutro de la multiplicación**: existe un elemento especial, el 1 (distinto de 0) que cumple:

$a . 1 = a$, cualquiera sea a.

5) Existencia del **opuesto**: se cumple además que todo número real tiene **opuesto**, es decir para cada número real a existe – a que cumple que a + (- a) = 0.

Por ejemplo si a=5, - a = - 5 ya que 5 + (- 5)= 0; si a= -7 entonces - a= 7 cumple que -7 + 7 = 0

6) Existencia del **inverso**: Respecto de la multiplicación, todo número real a no nulo ($a \neq 0$) tiene **inverso** $a^{-1} = \frac{1}{a}$ tal que $a. a^{-1} = 1$

Por ejemplo, si $a = 5$ entonces $a^{-1} = \frac{1}{5}$ ya que $5. \frac{1}{5} = 1$.

Si $a = \frac{1}{7}$ entonces $a^{-1} = 7$ ya que $\frac{1}{7}. 7 = 1$.

7) Propiedad **distributividad**: esta propiedad relaciona las operaciones de suma y producto y se enuncia de la siguiente manera:

$a . (b + c)= a . b + a . c$, cualesquiera sean a, b y c números reales.

Observación: En muchos casos no escribimos el punto . para denotar la multiplicación sino que se sobre entiende, así interpretamos ab como $a . b$

Recordemos que si queremos multiplicar números de diferente signo debemos aplicar la regla de los signos:

Signo de a	Signo de b	Signo de ab
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

Mostraremos a continuación algunos ejemplos donde usaremos la regla de los signos y las propiedades de números reales.

Ejemplo 1

$$4-[4+2(3-5)-7.(-1+3)] = ?$$

Existen diferentes caminos posibles para realizar estas operaciones, aquí propondremos dos opciones diferentes y quedará como ejercicio al lector analizar otras alternativas.

El primer paso debe ser separar en términos para determinar que operaciones deben realizarse primero. La suma, la resta y los paréntesis o corchetes determinan los términos distintos:

$$\overbrace{4} - \overbrace{[4+2.(3-5)-7.(-1+3)]} =$$

Dentro del corchete, podemos nuevamente separar en términos:

$$\overbrace{4} - \overbrace{\left[\overbrace{4} + \overbrace{2.(3-5)} - \overbrace{7.(-1+3)}\right]} =$$

Vamos a aplicar propiedad distributiva para eliminar los paréntesis dentro del corchete ya que debemos resolver primero esos términos para luego poder realizar la suma.

$$4-[4+2(3-5)-7.(-1+3)] = 4-[4+6-10+7-21]$$

Notemos que hemos usado regla de los signos al mismo tiempo. Luego agrupamos los términos de igual signo para sumar dentro del corchete

$$4-[4+6-10+7-21] = 4-[(4+6+7)-(10+21)]=4-[17-31]$$

A continuación, eliminamos los corchetes (usamos regla de los signos nuevamente) y obtenemos el resultado final

$$4-17+31=(4+31)-17=35-17=18$$

Otra forma posible de resolver este ejercicio es realizando la operación dentro del paréntesis y luego eliminarlos, es decir:

$$4-[4+2(3-5)-7.(-1+3)]=4-[4+2(-2)-7(2)]=4-[4-4-14]$$

Asociando convenientemente, tenemos:

$$4-[4-(4+14)]=4-[4-18]=4-[-14]$$

Usamos aquí nuevamente la regla de los signos para sacar los corchetes:

$$4+14=18$$

Llegamos al mismo resultado como era de esperarse.

Ejemplo 2

$$7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-\left(6+2-7\right)-10\right)-5\right]=?$$

Cuando tenemos varios paréntesis anidados (es decir, unos dentro de otros), debemos quitarlos desde "adentro hacia afuera", es decir los paréntesis más internos se eliminan primero:

$$7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-\left(6+2-7\right)-10\right)-5\right]=7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-6-2+7-10\right)-5\right]$$

$$=7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-6-2+7-10\right)-5\right]$$

$$=7-8+\left[4-\sqrt{2}-3+6+2-7+10-5\right]$$

$$=7-8+\left[4-\sqrt{2}-3+6+2-7+10-5\right]$$

$$=7-8+4-\sqrt{2}-3+6+2-7+10-5$$

Agrupamos convenientemente y operamos:

$$7-8+4-\sqrt{2}-3+6+2-7+10-5=\left(7+4+6+2+10\right)-\left(8+\sqrt{2}+3+7+5\right)$$

$$=29-\left(23+\sqrt{2}\right)$$

$$=6-\sqrt{2}$$

Como el número $\sqrt{2}$ es irracional, dejaremos expresado de esa manera el resultado para que sea el valor exacto. Si reemplazamos $\sqrt{2}$ por una aproximación decimal estaríamos obteniendo un resultado aproximado.

En este ejercicio también podríamos resolver primero las operaciones en cada paréntesis interior y luego quitar los paréntesis, es decir:

$$7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-\left(6+2-7\right)-10\right)-5\right]=7-8+\left[4-\left(\sqrt{2}+3-\left(1\right)-10\right)-5\right]$$

$$= 7-8+[4-(\sqrt{2}+3-1-10)-5]$$

$$= 7-8+[4-(\sqrt{2}-8)-5]$$

En este paso, no vamos a reemplazar $\sqrt{2}$ para no aproximar el resultado y aplicamos regla de los signos para eliminar el paréntesis:

$$7-8+[4-(\sqrt{2}-8)-5] = 7-8+[4-\sqrt{2}+8-5]$$

Repetimos los pasos anteriores:

$$7-8+[4-\sqrt{2}+8-5] = 7-8+[7-\sqrt{2}]$$

$$= 7-8+7-\sqrt{2}$$

$$= 6-\sqrt{2}$$

Llegamos al mismo resultado como era de esperarse.

1.3 Operaciones con fracciones

Si bien suponemos que el lector conoce cómo realizar la suma y multiplicación de números reales, repasaremos brevemente cómo realizarlas para el caso de fracciones.

Multiplicación	$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$
División	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$
Suma **igual** denominador	$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
Suma **distinto** denominador	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+c.b}{b.d}$

En el caso de sumar fracciones con distinto denominador, no siempre es necesario considerar la multiplicación de los denominadores sino que es suficiente tomar un múltiplo común a ambos denominadores, por ejemplo:

$$\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{7.3+5.2}{12}=\frac{21+10}{12}=\frac{31}{12}$$

Recordemos también si tanto numerador como denominador tiene un factor común, podemos simplificar la fracción, por ejemplo:

$$\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

$$\frac{22}{44}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Veamos algunos ejemplos de cómo operar con fracciones

<u>Ejemplo 1</u>

$$\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{9}-\frac{1}{18}\right)}{\left(1+\frac{1}{6}\right)}=?$$

Podemos reescribir esta expresión de la siguiente manera:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{9}-\frac{1}{18}\right)}{\left(1+\frac{1}{6}\right)}=\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{9}-\frac{1}{18}\right):\left(1+\frac{1}{6}\right)$$

Primero sumamos las fracciones en cada paréntesis por separado:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{9}-\frac{1}{18}\right):\left(1+\frac{1}{6}\right) &= \left(\frac{3.9-5.2-1}{18}\right):\left(\frac{1.6+1}{6}\right)\\ &= \left(\frac{27-10-1}{18}\right):\left(\frac{7}{6}\right)\\ &= \left(\frac{16}{18}\right):\left(\frac{7}{6}\right)\end{aligned}$$

En este paso conviene simplificar las fracciones para trabajar con valores numéricos menores. En este ejemplo podemos simplificar la fracción 16/ 18 por 2, obteniendo 8/9 y además podemos simplificar el denominador 9 con el denominador 6, luego

$$\left(\frac{16}{18}\right):\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{8}{9}:\frac{7}{6}=\frac{8}{9}:\frac{7}{6}=\frac{8}{3}:\frac{7}{2}$$

Finalmente, realizamos la división de las fracciones

$$\frac{8}{3}:\frac{7}{2}=\frac{8.2}{3.7}=\frac{16}{21}$$

Ejemplo 2

$$2+\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{12}\right).\left(\frac{8}{15}-\frac{3}{10}\right) = ?$$

Comenzamos operando en cada paréntesis

$$2+\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{12}\right).\left(\frac{8}{15}-\frac{3}{10}\right) = 2+\left(\frac{5.2-1}{12}\right).\left(\frac{8.2-3.3}{30}\right)$$

$$= 2+\left(\frac{9}{12}\right).\left(\frac{7}{30}\right)$$

Simplificamos la fracción 9/12 por 3 obteniendo 3/4 y luego podemos simplificar el numerador 3 con el denominador 30

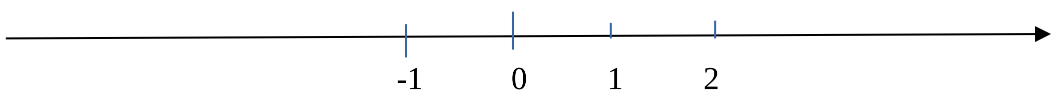
$$2+\left(\frac{9}{12}\right).\left(\frac{7}{30}\right) = 2+\left(\frac{3}{4}\right).\left(\frac{7}{30}\right) = 2+\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{7}{10}\right)$$

Multiplicamos primero, ya que debemos separar en términos, y luego sumamos

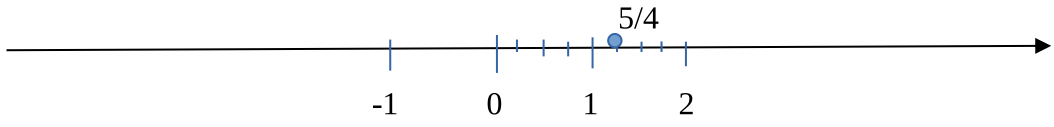
$$2+\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{7}{10}\right) = 2+\frac{7}{40} = \frac{80+7}{40} = \frac{87}{40}$$

1.4 Representación gráfica de los números reales

Todo número real puede ser representado como un punto sobre una recta como se muestra en la siguiente figura. Elegimos un punto arbitrario que llamaremos origen para representar el 0, a la derecha de él consideraremos los números positivos y lo indicamos con una flecha. Hacia la izquierda del origen marcamos los números negativos. Consideramos una longitud arbitraria para representar la unidad y la repetimos hacia la derecha para denotar los números naturales. De manera análoga, marcamos los enteros negativos hacia la izquierda.



Para representar una fracción debemos dividir la unidad (o unidades) en tantas partes como indica el denominador y tomamos tantas de esas partes como indica el numerador. Como ejemplo, marquemos el punto 5/4. El denominador es 4, luego debemos dividir la unidad en 4 partes. Como el numerador es 5 necesitamos tomar 5 de esas partes, luego no nos alcanza con una unidad por lo cual debemos fraccionar la segunda unidad, tenemos entonces:



1.5 Orden de los números reales

Otra característica muy importante de los números reales es que son **ordenados**. Esto significa que dados a y b, diremos que **a es menor que b** y escribimos a < b, si el número b - a es positivo. De manera equivalente podemos decir que **b es mayor que a** y escribimos b > a.

Algunas de las propiedades del orden de los números reales son:

1) **Tricotomía**: Dados dos números reales a y b se cumple una y solo una de las siguientes afirmaciones: a < b ó a > b ó a = b.

2) **Consistencia del orden respecto de la suma**: Dados 3 números reales a, b y c, si se cumple que a < b entonces a + c < b + c

Esta propiedad nos dice que si sumamos un valor c arbitrario en ambos miembros de una desigualdad esta se mantiene. Por ejemplo:

5 < 7 luego 5+3 < 7+ 3

3) **Consistencia del orden respecto del producto**: Dados 3 números reales a, b y c, si se cumple que a < b y c > 0 entonces a . c < b . c

Esta propiedad nos dice que si multiplicamos por un valor c **positivo** en ambos miembros de una desigualdad esta se mantiene. Por ejemplo:

5 < 7 luego 5. ½ < 7. ½

Es importante destacar que si el número c es **negativo** entonces al multiplicar la desigualdad por ese valor la misma se invierte. Por ejemplo:

5 < 7 luego 5. (-2) > 7 . (-2)

1.6 Exponentes de un número real

En esta sección repasaremos las propiedades de las potencias y radicales de números reales.
Supongamos que queremos calcular la multiplicación 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 243, para abreviar dicha expresión introducimos la siguiente notación 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 3^5

En general si a es un número real y n es un natural escribimos a^n para describir la multiplicación **n veces** del número real a. Es decir

$$a^n = \underbrace{a.a\ldots a}_{n\ veces}$$

Llamaremos exponente al natural n y base al número a.

Definimos también a^{-n} como $\left(\frac{1}{a}\right)^n$, siempre que n sea un número natural. Además, si a es distinto de 0 ($a \neq 0$), definimos $a^0 = 1$.

<u>IMPORTANTE!!</u> Debemos hacer un uso correcto de los paréntesis en el caso de a un número negativo. Por ejemplo $(-5)^4 = 625$ no es igual a $-5^4 = -625$ ya que en el primer caso el valor que debe multiplicarse por si mismo 4 veces es -5, mientras que en el segundo caso queremos calcular el opuesto de 5^4.

Podemos deducir las siguientes propiedades de las potencias, para a y b números reales y n y m naturales:

- $a^n . a^m = a^{n+m}$, en efecto si multiplico n veces a y luego m veces a, el resultado es igual a multiplicar n+ m veces a.
- $a^n : a^m = a^{n-m}$, en efecto $a^n : a^m = a^n . \left(\frac{1}{a^m}\right) = a^n . a^{-m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, ¿cómo podría justificar esta afirmación?
- $(a.b)^n = a^n . b^n$, para justificar esta afirmación notemos que $(a.b)^n$ es igual a multiplicar ab por si mismo n veces, es decir

$$(a.b)^n = \underbrace{(a.b).(a.b) \dots (a.b)}_{n\ veces}$$

aplicando reiteradas veces la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa podemos reescribir esta expresión

$$(a.b).(a.b) \dots (a.b) = \underbrace{(a.a \dots a)}_{n\ veces} . \underbrace{(b.b \dots b)}_{n\ veces}$$

lo que es igual a $a^n . b^n$ como queríamos probar.

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, es un buen ejercicio para el lector tratar de justificar esta afirmación de manera similar a la justificación de la propiedad anterior.

Analicemos algunos ejemplos para mostrar cómo aplicar las propiedades de las potencias:

<u>Ejemplo 1</u>

$$\frac{a^3 . b^2 . c^4 . a^4 . b^{-3}}{a^5 . b^4 . c^{-5}} = a^{(3+4-5)} . b^{(2+(-3)-4)} . c^{(4-(-5))} = \frac{a^2 . c^9}{b^5}$$

Ejemplo 2

$$(xy)^2 c^4 x^4 (x\,y^{-1})^{-3} = x^2 y^2 c^4 x^4 x^{-3} y^3 = x^{(2+4-3)} y^{(2+3)} c^4 = x^3 y^5 c^4$$

1.7 Radicales de un número real

Sea a un número real y n un número natural, definimos la **raíz n-ésima** de a por el número real b que cumple que $b^n = a$, escribimos

$$\sqrt{a} = b \text{ si se cumple que } b^n = a$$

Veamos algunos ejemplos:

- $\sqrt[3]{8} = 2$ pues $2^3 = 8$
- $\sqrt[5]{243} = 3$ pues $3^5 = 243$
- $\sqrt[4]{256} = 4$ pues $4^4 = 256$

Notemos que la raíz n-ésima de a no siempre está definida, por ejemplo $\sqrt[4]{-16}$ no está definida pues no existe ningún número real b tal que $b^4 = -16$. De manera similar para cualquier raíz de índice n par si el radicando a es negativo.

Si el índice de la raíz n es igual a 2 no lo escribimos sino que se sobreentiende, por ejemplo $\sqrt{4} = 2$.

Observación: La raíz n-ésima de un número real puede expresarse como una potencia, en efecto:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Luego, todas las propiedades de las potencias pueden aplicarse a los radicales siempre y cuando el radical esté definido. Realicemos algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{b^{3\cdot} a^{8\cdot} (a\,.\,b)^{20}}{a^{-10} b^{-1}}}} = \sqrt[12]{\frac{b^{3\cdot} a^{8\cdot} a^{20\cdot} b^{20}}{a^{-10} b^{-1}}} = \sqrt[12]{b^{3+20-(-1)}\,.\,a^{8+20-(-10)}}$$

$$= \sqrt[12]{b^{24}\,.\,a^{38}} = \sqrt[12]{b^{24}}\,.\,\sqrt[12]{a^{36+2}} = b^2\,.\,a^3\,.\,\sqrt[12]{a^2}$$

Ejemplo 2

$$\sqrt[3]{(x^3.a^7):(a.y)^{10}} = \sqrt[3]{(x^3.a^7):(a^{10}.y^{10})} = \sqrt[3]{x^3.a^{7-10}.y^{-10}}$$

$$= \sqrt[3]{x^3.a^{-3}.y^{-9-1}} = \sqrt[3]{x^3}.\sqrt[3]{a^{-3}}.\sqrt[3]{y^{-9-1}}$$

$$= x.a^{-1}.y^{-3}.\sqrt[3]{y^{-1}} = \frac{x}{a.y^3.\sqrt[3]{y}}$$

Observación

Antes de aplicar una propiedad de la potencia, debemos chequear que tenga sentido aplicarla para el radicando en consideración, por ejemplo la propiedad $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^2}$ puede aplicarse siempre y cuando **x sea positivo**. Si por ejemplo x = - 8 **no puede aplicarse dicha propiedad.** En efecto $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{-8}=-2$ pero $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2$

II. NÚMEROS COMPLEJOS

Hay ecuaciones que no se pueden resolver en el conjunto de los números reales. Por ejemplo, con sólo los números reales no podemos resolver $x^2=-1$

Para buscar una solución a esta dificultad introducimos un nuevo símbolo, i, que por definición cumple que $i^2=-1$.

Después, escribimos expresiones de la forma **a + bi**, donde **a** y **b** son números reales, y a estas expresiones las llamamos **números complejos**. El número **a** es la **parte real** de **a + bi**, y **b** es la **parte imaginaria**. Para poder manejar estas expresiones como números, debemos definir con ellas las operaciones aritméticas usuales.

2.1 Definiciones

Las operaciones aritméticas en el conjunto de los números complejos se definen así:

Igualdad: $a+bi=c+di$ si y solamente si $a=c$ y $b=d$

Adición: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

Multiplicación: $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$

Obsérvese que la definición de multiplicación es consistente con la propiedad asignada a *i*, a saber, $i^2=-1$.

En efecto, si multiplicamos $(a+bi)\cdot(c+di)$ usando la propiedad distributiva descripta para números reales obtenemos $ac+i(bc+ad)+i^2(bd)$. Ahora, cuando sustituimos i^2 por –1, llegamos a la fórmula de la definición.

Ejemplo 1)

a. $(3+6i)+(2-3i)=5+3i$

b. $(7+5i)-(1+2i)=6+3i$

c. $(5+7i)\cdot(3+4i)=15+41i+28i^2=(15-28)+41i=-13+41i$

d. $(2-3i)\cdot(-1+4i)=-2+11i-12i^2=(-2+12)+11i=10+11i$

También debemos definir la división. Para ello debemos primero recordar la definición de **complejo conjugado.**

Definición de conjugado

Si z es un número complejo, llamaremos **conjugado** de z al número complejo cuya parte imaginaria tiene el signo cambiado, lo denotaremos $\bar{z}$.

Es decir, si z = $a+bi$ entonces su conjugado es $\bar{z}=a-bi$.

Por ejemplo, si z = 3 + 4i entonces $\bar{z}$ = 3 - 4 i. Si z = - 2 – 5i entonces $\bar{z}$ = - 2 + 5i.

2.2 División de Números Complejos

Si queremos calcular el complejo $\frac{1}{a+bi}$ procedemos multiplicando en el numerador y en el denominador por el conjugado del denominador, es decir:

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{1}{(a+bi)}.\frac{(a-bi)}{(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i$$

Análogamente, podemos calcular un cociente general de la siguiente manera:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplo 2)

$$\frac{4+i}{2-3i}=\frac{4+i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{5+14i}{13}=\frac{5}{13}+\frac{14}{13}i$$

2.3 Ecuaciones con números complejos

Podemos encontrarnos con algunas ecuaciones que contienen números complejos. El siguiente ejemplo sugiere el método general.

Ejemplo

Encontrar el número complejo z = x +yi que cumple:

$$\left(x+yi\right)\left(2-3i\right)=4+i\ .$$

Podríamos resolver la ecuación escribiendo

$$x+yi=\left(4+i\right)/\left(2-3i\right)$$

y calculando a continuación el cociente indicado en el miembro de la derecha. Sin embargo, utilizaremos otro procedimiento para ejemplificar cómo utilizamos la definición de igualdad de números complejos mencionada más arriba.

Si efectuamos la multiplicación en el miembro de la izquierda obtenemos

$$\left(2x+3y\right)+\left(-3x+2y\right)i=4+i$$

Según nuestra definición de igualdad de dos números complejos, las partes reales de ambos miembros han de ser iguales y, del mismo modo, las partes imaginarias también han de serlo. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ -\ 3x & + & 2y & = & 1 \end{array}$$

Resolvemos estas ecuaciones simultáneas multiplicando por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda y sumando las dos ecuaciones,

$$\begin{array}{rrcrcr} & 6x & + & 9y & = & 12 \\ + & -6x & + & 4y & = & 2 \\ \hline & & & 13y & = & 14 \\ & & & y & = & \dfrac{14}{13} \end{array}$$

Multiplicamos por 2 la primera ecuación y por –3 la segunda ecuación y sumando las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcrcr} & 4x & + & 6y & = & 8 \\ + & 9x & - & 6y & = & -3 \\ \hline & 13x & & & = & 5 \\ & & & x & = & \dfrac{5}{13} \end{array}$$

Este método, que consiste en igualar las partes reales e imaginarias, es de gran importancia en la aplicación de los números complejos a la ingeniería.

2.4 Otra manera de definir números complejos

Nuestra definición de números complejos carece de recursos intuitivos. Dijimos que no existe ningún número real x tal que $x^2 = -1$, pero, sin embargo, introdujimos i dotado de esta propiedad. ¿Qué es, pues, i? Tanto inquietó esta pregunta a los matemáticos que al fin, dieron a i el nombre de número imaginario y a $a+bi$ el de número complejo, para indicar el contraste con los otros números de nuestro sistema, que son reales. Nuestro propósito actual es iniciar un nuevo desarrollo de los números complejos de una manera lógica y fuera de lo imaginario.

Definiciones

Número complejo

Un número complejo es un par ordenado de números reales (a, b)

Parte real de un número complejo

El número complejo (a, 0) se llama parte real del número complejo (a, b). Veremos que, de una manera natural, se pueden identificar los pares (a, 0) con los números reales a.

Número imaginario puro

Un número complejo de la forma (0, b) se llama número imaginario puro.

La aritmética de los números complejos viene dada por las siguientes definiciones básicas.

Definiciones

Igualdad

Dos números complejos (a, b) y (c, d) son iguales si y solamente si $a = c$ y $b = d$.

Adición

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

Multiplicación

$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$

Es evidente que existe una correspondencia biunívoca entre, los números complejos (a, 0) y los números reales a, que está definida por

$(a,0)\longleftrightarrow a$.

Esta correspondencia es particularmente útil porque en ella las sumas corresponden a las sumas y los productos corresponden a los productos. Esto es:

$$\begin{array}{ccccc} (a,0) & + & (c,0) & = & (a+c,0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & + & c & = & a+c \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} (a,0) & \cdot & (c,0) & = & (ac,0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & \cdot & c & = & ac \end{array}$$

Este tipo de correspondencia se llama **isomorfismo** y decimos que el conjunto de los números complejos (a, 0) es isomorfo al conjunto de los números reales a, con respecto a la adición y a la multiplicación. Se justifica así la identificación de los dos sistemas. En consecuencia, podemos decir que (a, 0) es un número real cuando no exista motivo de confusión.

Adición : $(0,b)+(0,d)=(0,b+d)$

Multiplicación : $(0,b)\cdot(0,d)=(-bd,0)$

Es importante observar que el producto de dos números imaginarios puros es un número real. En particular,

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$$

Recordemos ahora que lo que motivó nuestra introducción de los números complejos fue, precisamente, la imposibilidad de resolver la ecuación $x^2=-1$ dentro del conjunto de los números reales.

Veamos ahora como la introducción de los números complejos nos permite resolver esta ecuación. Conforme con el isomorfismo, la ecuación

$$(x,y)^2=(x,y)\cdot(x,y)=(-1,0)$$

Según hemos visto, $(x,y)=(0,1)$ es una solución de esta ecuación, además se puede comprobar que $(x,y)=(0,-1)$ es otra solución. Por consiguiente, nuestra introducción de los números complejos nos permite resolver ecuaciones de este tipo que no tienen solución en los números reales.

Para completar nuestra discusión necesitamos mostrar la correspondencia entre nuestras dos definiciones de los números complejos. Antes de entrar en esa discusión, señalaremos las siguientes identidades:

$$(0,b)=(b,0)\cdot(0,1)$$
$$(a,b)=(a,0)+\left[(b,0)\cdot(0,1)\right]$$

Como ejercicio verifique las identidades anteriores.
Ahora estableceremos la siguiente relación entre las dos notaciones:

	Notación (a,b)	Notación a + bi
Números Reales	(a,0)	a
Unidad Imaginaria	(0,1)	i

Utilizando las identidades anteriores podemos, ahora, deducir las correspondencias:

	Notación (a,b)	Notación a + bi

Imaginarios Puros	(0,b)	bi
Números Complejos	(a,b)	a + bi

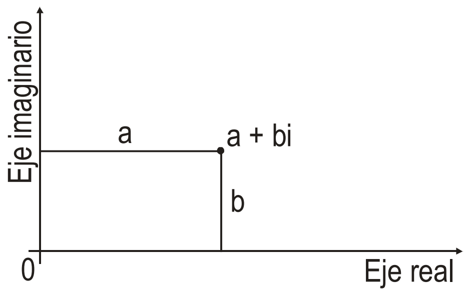
De estas correspondencias se deduce que las reglas que rigen la igualdad, la adición y la multiplicación de los números complejos en notación $a+bi$, que fueron establecidas como definiciones anteriormente, concuerdan con las correspondientes definiciones en notación (a,b).

2.5 Representación gráfica de los números complejos

A diferencia de los números reales, los números complejos no se pueden representar, de una manera aceptable, como puntos de una recta. Por la misma razón no podemos definir la noción de desigualdad entre dos números complejos.

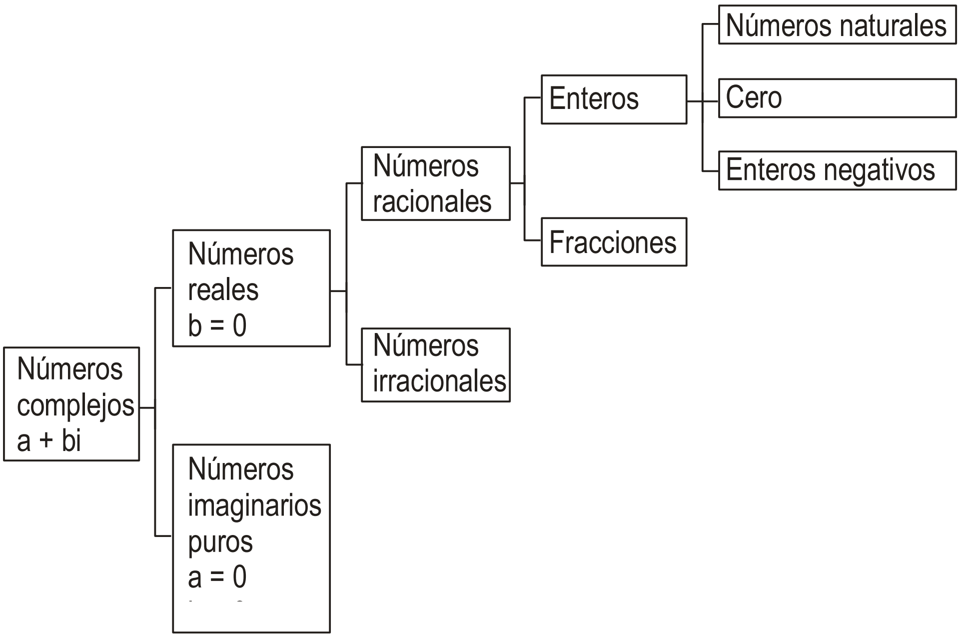
Si queremos representar gráficamente los números complejos, el procedimiento más conveniente es asociarlos biunívocamente con los puntos del plano.

Para ello, medimos la parte real a de $a+bi$ a lo largo del eje horizontal (o eje real) y la parte imaginaria b a lo largo del eje vertical (o eje imaginario).
De esta manera establecemos una correspondencia biunívoca entre los números complejos y los puntos del plano.



2.6 Clasificación de los números

El siguiente esquema muestra las diferentes clases de números y las relaciones que existen entre ellas.



II. Ejercitación de la Unidad

3.1 Ejercicios de números Reales

Ejercicio 1) En los siguientes apartados realice las operaciones indicadas:

a) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)^{-2} : \frac{10}{3} =$ $\qquad R = \frac{10}{3}$

b) $\sqrt{\frac{3}{5}+\frac{1}{25}} - \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} =$ $\qquad R = \frac{17}{25}$

c) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) : \frac{7}{40}} =$ $\qquad R = 2$

d) $\left(\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{\frac{16}{25}}-\sqrt{\frac{1}{225}}\right)^{2} =$ $\qquad R = \frac{49}{25}$

e) $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}+\frac{2}{\sqrt{9}}\right) \cdot 15} =$ $\qquad R = 4$

f) $\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} =$ $\qquad R = 2$

g) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{13}{6}\right)^2+\left[\frac{3}{5}:\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)\right]^2}=$ $\qquad R=5$

h) $\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{7}\right):\left(1-\frac{3}{17}\right)^{-1}}=$ $\qquad R=1$

i) $\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{19}{25}-\frac{2}{5}}=$ $\qquad R=\frac{9}{10}$

j) $\left(-\frac{6}{3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)=$ $\qquad R= -14$

k) $\left(\frac{1}{3}+\sqrt[3]{\frac{-1}{27}}+\sqrt[4]{16}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[5]{32}}\right)=$ $\qquad R=-3$

l) $\left(\frac{1+\sqrt{9}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1-\sqrt[3]{-8}}{6}\right)^2+\left(\frac{8-\sqrt[5]{32}}{3}\right)^{-3}=$ $\qquad$ R= $\frac{7}{8}$

m) $\frac{1}{\sqrt[3]{-1}+3}-\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{64}}\right)^{-1}-\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{343}}=$ $\qquad$ R=$\frac{13}{42}$

n) $\left[2^2+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^2-\left[5^2-\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^3\cdot\left(-1+\frac{6^{-1}}{2^{-2}}\right)=$ $\qquad R=\frac{139}{3}$

o) $\frac{\left(\sqrt{1+\frac{9}{16}}\right)^{-1}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}}{\sqrt{3^{-4}}\cdot 3^3}=$ $\qquad R=\frac{4}{45}$

p) $\left(\sqrt{0,25}+0,3+\frac{1}{5}\right)\cdot\sqrt{1-0,36}\cdot\sqrt[3]{\frac{63}{64}-1}=$

q) $\left[\dfrac{\dfrac{2}{3}+0,4}{(0,2)^3}:\dfrac{\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt[3]{-1+0,784}}\right]\cdot\left[-3-\left(\dfrac{-0,2}{5}\right)\right]=$ $\qquad R=\dfrac{74}{5}$

Ejercicio 2) Dar un número racional comprendido entre cada uno de los pares de números siguientes: <u>Nota</u>: la respuesta no es única

---

a. $\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{3}{4}$ $\qquad R=\dfrac{17}{24}$

b. $-\dfrac{1}{5}$ y $-\dfrac{2}{5}$ $\qquad R=-\dfrac{3}{10}$

c. $\pi-3$ y $\dfrac{15}{100}$ $\qquad R=(100\pi-285)/200$

d. $\dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{3}{5}$. $\qquad R=\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{20}$

Ejercicio 3) Grafique los siguientes números sobre una recta y ordénelos de menor a mayor:

$\dfrac{4}{5};-2;\dfrac{0}{3};\dfrac{-2}{3};\dfrac{3}{4};\dfrac{2}{7};\dfrac{6}{7}.$

Ejercicio 4) Reduzca a un denominador común y calcule lo que se pide

---

a. 3 números racionales comprendidos entre $\frac{3}{5}$ y $\dfrac{4}{5}$

b. 4 números racionales comprendidos entre $\frac{1}{3}$ y $\dfrac{3}{4}$

c. 5 números racionales comprendidos entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{5}{6}$

Ejercicio 5) Escriba los siguientes números como cociente de dos enteros

---

a. 3,242424... $\qquad R=\dfrac{321}{99}$

b. 0,555... $\qquad R=\dfrac{5}{9}$

c. 0,142857142857... $R = \frac{142857}{999999}$

Ejercicio 6)

Un alumno obtuvo 9, 7 y 6 de calificación en sus tres primeras evaluaciones de Álgebra. ¿Qué calificación debe obtener en la cuarta evaluación para que su promedio sea 8?

R = 10

Ejercicio 7)

Un granjero distribuyó cierto número de hectáreas de tierra entre sus tres hijos. Marta recibió 2/3 de la tierra distribuida, Jorge 4/7 de lo que quedó y por último Raúl se quedó con lo restante, 18 hectáreas. ¿Cuántas hectáreas obtuvo Marta?

R = 84 hectáreas

Ejercicio 8)

Una persona caminó cierta distancia, trotó $2\frac{1}{2}$ la distancia que caminó y corrió $2\frac{1}{2}$ veces la distancia que trotó. Si en total recorrió 2.340 metros, ¿Cuánto caminó?

R = 240 metros

3.2 Ejercicios de Números Complejos

Ejercicios 1) Encontrar la suma o diferencia de los siguientes números complejos

a) $(3+6i)+(8-i)=$ $R=11+5i$

b) $(13-4i)-(25+6i)=$ $R=-12-10i$

c) $(8+2i)+(-6-20i)=$ $R=2-18i$

d) $-(6-5i)+(7+3i)=$ $R=1+8i$

e) $-(4+3i)-(-3+7i)=$ $R=-1-10i$

f) $18-(13-2i)=$ $R=5+2i$

g) $(14+11i)-13i=$ $R=14-2i$

Ejercicio 2) Encontrar el producto de los siguientes números complejos

a) $\left(2+5i\right)\left(-3+i\right)=$ $R=-11-13i$

b) $\left(4+11i\right)\left(6-i\right)=$ $R=35+62i$

c) $\left(\sqrt{7}+i\right)\left(\sqrt{7}-i\right)=$ $R=8$

d) $\left(4+2i\right)\left(4-2i\right)=$ $R=20$

e) $9\left(4-6i\right)=$ $R=36-54i$

f) $\left(7i\right)\left(3+6i\right)=$ $R=-42+21i$

g) $\left(4i\right)\left(9i\right)=$ $R=-36$

Ejercicio 3) Encontrar el cociente de los siguientes números complejos

a) $(3+2i)/(4+3i)=$ $R=\dfrac{(18-i)}{25}$

b) $(14+3i)/(2-i)=$ $R=5+4i$

c) $(-6+2i)/(-3+2i)=$ $R=\dfrac{(22+6i)}{13}$

d) $3i/(5+4i)=$ $R=\dfrac{(12+15i)}{41}$

e) $(4+2i)/7i=$ $R=\dfrac{(2-4i)}{7}$

Ejercicio 4) En los siguientes apartados opere en el miembro de la izquierda e iguale las partes reales e imaginarias de los números complejos para obtener x e y.

a) $\left(x+iy\right)\left(3-2i\right)=4+i$ $R: x=\dfrac{10}{13},\ \ y=\dfrac{11}{13}$

b) $\left(x+iy\right)\left(6-3i\right)=5+6i$ $\qquad R: x=\dfrac{4}{15},\ \ y=\dfrac{17}{15}$

c) $\left(x+iy\right)\left(-4+7i\right)=-16+3i$ $\qquad R: x=\dfrac{17}{13},\ \ y=\dfrac{20}{13}$

Ejercicio 5) En los siguientes apartados, compruebe que el número complejo z satisface la ecuación dada.

---

a) Z= $1+2i;$ $\qquad x^2-2x+5=0$

b) Z= $3+2i;$ $\qquad x^2-\left(7+3i\right)x+\left(10+11i\right)=0$

c) Z= $4+i;$ $\qquad x^2-\left(7+3i\right)x+\left(10+11i\right)=0$

Ejercicio 6) En los siguientes apartados, realice las operaciones con números complejos indicadas.

.

a. $\left(4-3i\right)+\left(2i-8\right)$ $\qquad R=-4-i$

b. $3\left(-1+4i\right)-2\left(7-i\right)$ $\qquad R=-17+14i$

c. $\left(3+2i\right)\left(2-i\right)$ $\qquad R=8+i$

d. $\left(i-2\right)\left[2\left(1+i\right)-3\left(i-1\right)\right]$ $\qquad R=-9+7i$

e. $\dfrac{2-3i}{4-i}$ $\qquad R=\dfrac{11}{17}-\dfrac{10}{17}i$

f. $\left(4+i\right)\left(3+2i\right)\left(1-i\right)$ $\qquad R=21+i$

g. $\dfrac{\left(2+i\right)\left(3-2i\right)\left(1+2i\right)}{\left(1-i\right)^2}$ $\qquad R=-\dfrac{15}{2}+5i$

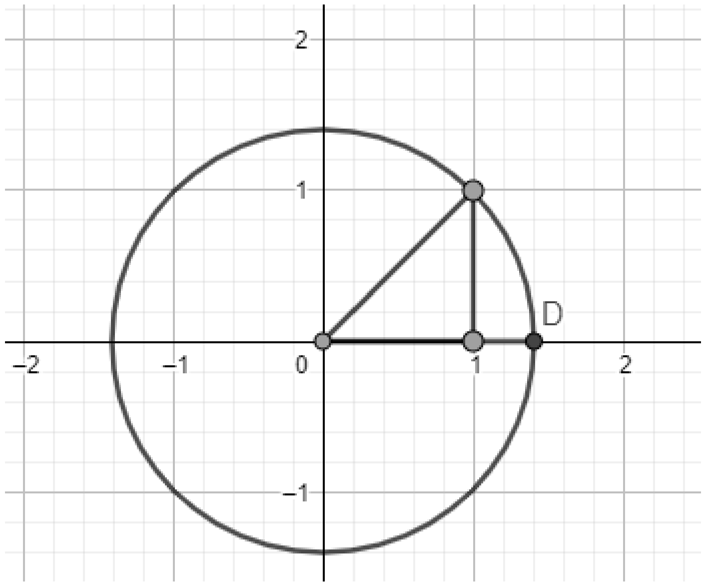
h. $\left(2i-1\right)^2\left(\dfrac{4}{1-i}+\dfrac{2-i}{1+i}\right)$ $\qquad R=-\dfrac{11}{2}-\dfrac{23}{2}i$

i. $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$ $\qquad R=2+i$

j. $3\dfrac{\left(1+i\right)^2}{\left(1-i\right)^2}-2\dfrac{\left(1-i\right)^3}{\left(1+i\right)^3}$ $\qquad R=-3-2i$

3.3 Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1) Utilizando la siguiente figura, explique cómo localizar el elemento $\sqrt{2}$ en la recta real. Utilizando esta metodología, ¿podría localizar $\sqrt{3}$?



3.4 Ejercicios de Parciales anteriores

Ejercicios de Números Reales

Resuelve la siguiente expresión con números reales realizando las operaciones indicadas

1) $$\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4}-1+\frac{1}{8}}.\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{\sqrt{6^2+8^2}.\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)}$$

2) $$\frac{\left(1+\frac{1}{6}\right).\sqrt{(5^2-4^2)}}{\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{12}\right)}+(-4)^{-2}$$

3) $$(-3)^2+\frac{\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{12}\right)}{\sqrt[3]{125}.\sqrt{(5^2-4^2)}}$$

4) $(-3)^2+\dfrac{\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{12}\right)^{-1}}{\sqrt[3]{27}+\sqrt{(5^2-4^2)}}$

5) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{18}\right)^{-1}}{\left(1+\dfrac{1}{6}\right).\sqrt{(5^2-4^2)}}$

<u>Ejercicios de Números Complejos</u>

Resuelve la siguiente expresión con números complejos realizando las operaciones indicadas

1) $\dfrac{5-3i}{(-2i).(2i^{13}-(i)^3+i^{22})}$

2) $\dfrac{(2-2i)(4i+1).i^{33}}{(4-2i)-(4i+5)+(2+3i)}$

3) $\dfrac{[(1-3i)+(4i+1)].i^{17}}{(2+3i)}$

2

Polinomios

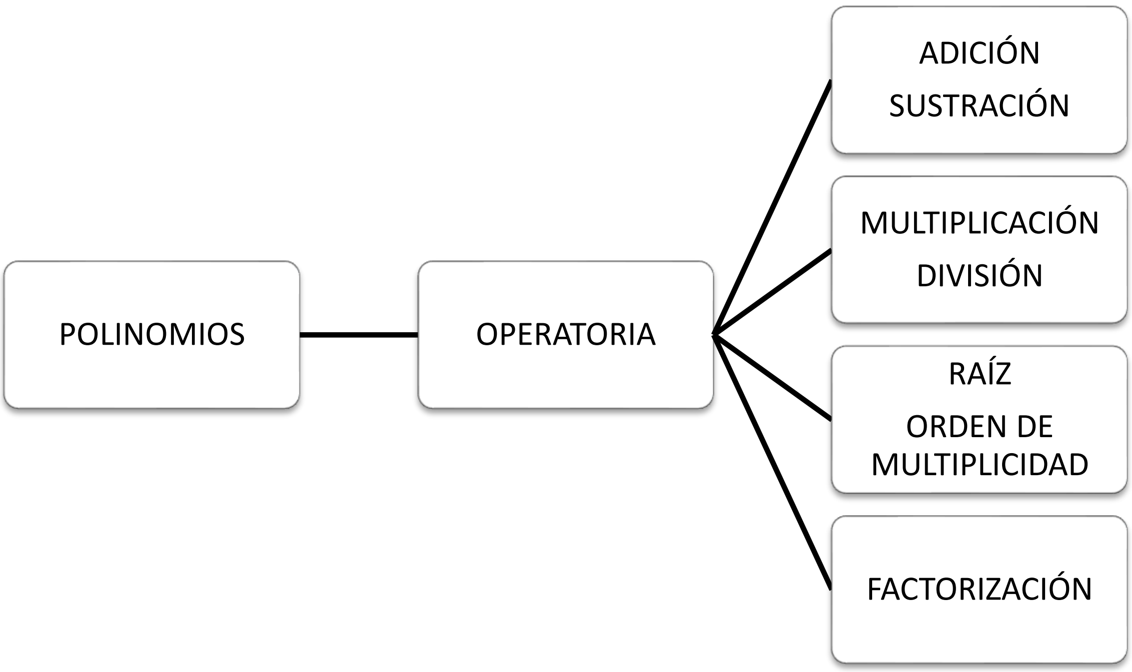
Objetivos

Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- **Identificar polinomios**
- **Efectuar correctamente las operaciones con polinomios en una indeterminada**
- **Determinar si un polinomio A es divisor de un polinomio B**
- **Determinar el orden de multiplicidad de la raíz de un polinomio**
- **Factorizar polinomios**

Contenidos

Esquema conceptual



2.1 Introducción

Una expresión de la forma $P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots\ldots + a_n.x^n$ recibe el nombre de polinomio en la indeterminada *x*. Este tipo de expresión aparece frecuentemente en diversas ramas de la matemática, como el algebra, la geometría y el análisis, por lo que estudiaremos sus propiedades y operaciones.

Orientación del aprendizaje

Consideraremos los polinomios como entes abstractos, definiendo operaciones entre ellos y estudiaremos sus propiedades básicas.

2.1.1 Definición de polinomio

Denominaremos polinomio a coeficientes reales a toda expresión de la forma:

$$\mathrm{P(x)} = \mathrm{a_0} + \mathrm{a_1.x} + \mathrm{a_2.x^2} + \ldots\ldots + \mathrm{a_n.x^n}$$

Donde n es un número entero mayor o igual a cero, $\mathrm{a_0}, \mathrm{a_1}, \ldots \mathrm{a_n}$ son números reales que llamaremos sus coeficientes y x es un símbolo o indeterminada.

Ejemplo 1: $P(x) = 1 + 3x - 2x^2 + x^3$
En este caso n=3, $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = -2, a_3 = 1$
Ejemplo 2: $P(x) = 0 + 0x + 3x^2 + 0x^3 - 5x^4$
En este caso n=4, $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 0, a_4 = 5$
Ejemplo 3: $P(x) = 3$
En este caso n=0, $a_0 = 3$; se suele escribir: $P(x) = 3x^0$.
Es costumbre no escribir los coeficientes nulos. El polinomio del ejemplo 2 se escribe $P = 3x^2 + 5x^4$. Tampoco escribiremos el coeficiente cuando es igual a uno; por ejemplo, $1x^3 = x^3$. El conjunto de polinomios a coeficientes reales se notara R[x]. Denominaremos a_i al coeficiente del término de grado i; por ejemplo, a_4 es el coeficiente del termino de grado 4.

Llamaremos polinomio nulo al que tiene todos sus coeficientes nulos y lo notaremos por 0. Es decir $P = 0$, o lo que es lo mismo $P = 0x^0$.
Dos polinomios son iguales si y solo si tienen iguales los coeficientes de los términos del mismo grado.

Sea P un polinomio distinto de cero, es decir que tiene al menos un coeficiente no nulo. Si n es un entero no negativo diremos que P tiene grado n cuando el coeficiente de grado n de P es distinto de cero y los de grado mayor que n son nulos. Esto es equivalente a decir que P es de la forma $a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots\ldots + a_n.x^n$ con $a_n \neq 0$. Notaremos $gr(P) = n$ y que el polinomio 0 no tiene grado.
Ejemplo 4: $gr(2 - x - x^2) = 2$
Ejemplo 5: $gr(9) = 0$
Denominaremos monomio de grado n a todo polinomio de la forma $a.x^n$ donde a es un numero real. Es decir, un monomio es un polinomio que tiene a lo sumo un único coeficiente distinto de cero.
Ejemplo 6: $3x^4$ es un monomio de grado 4
Ejemplo 7: $-x^2$ es un monomio de grado 2
Ejemplo 8: $4x^0$ es un monomio de grado 0

2.2 Operaciones con polinomios

2.2.1 Adición:

Sean $P = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots\ldots + a_n.x^n$ y $Q = b_0 + b_1.x + b_2.x^2 + \ldots\ldots + b_n.x^m$
Siempre podemos suponer que n=m, pues si fuera por ejemplo n<m, completaremos a P con ceros.

Definimos:

$$P+Q=(a_0+b_0)+(a_1+b_1).x+.\dots\dots.+(a_n+b_n).x^n$$

Es decir, el coeficiente de grado i de P+Q se obtiene sumando los coeficientes de grado i de P+Q.

Ejemplo 9:

Sean: $P=3-2x^2+3x^3+9x^4-11x^5$ y $Q=4x-6x^2+28x^5$

Disponemos el cálculo de la siguiente forma:

-11	9	3	-2	0	3
28	0	0	-6	4	0
17	9	3	-8	4	3

Por lo tanto: $P+Q=3+4x-8x^2+3x^3+9x^4-17x^5$

Supongamos que P es de grado n y Q de grado M con n<m entonces gr(P+Q)≤que el que el máximo grado de P y Q.

En el ejemplo anterior gr(P+Q)=5 (máximo grado)

En cambio, si $P=2+x+x^2$ y $Q=5+x-x^2$

Es $P+Q=7+2x$, y gr(P+Q)=1 (menor que el máximo de los grados).

Propiedades:

1. Asociativa: si P, Q y T son polinomios, entonces P+(Q+T)=(P+Q)+T
2. Conmutativa: si P, Q y T son polinomios, entonces P+Q=Q+P
3. Elemento neutro: si P es un polinomio, P+0=P, es decir el polinomio nulo es el elemento neutro.
4. Si P es un polinomio, existe un polinomio Q tal que P+Q=0· Q se denomina el inverso aditivo de P y se nota por –P.

Ejemplo 10: si $P=3+x-5x^2$ es $-P=-3-x+5x^2$

2.2.2 Sustracción de polinomios

La diferencia entre un polinomio P y un polinomio Q es el polinomio que se obtiene sumando a P el opuesto de Q.

$$P-Q=P+(-Q)$$

Ejemplo 11: si $P=6+15x+2x^2$ y $Q=-7x+6x^2-x^4$ es

$$P-Q=(6+15x+2x^2)-(-7x+6x^2-x^4)$$
$$P-Q=(6+15x+2x^2)+(7x-6x^2+x^4)$$
$$P-Q=6+22x-4x^2+x^4)$$

2.2.3 Multiplicación de polinomios

Si ax^n y bx^m son monomios, definimos su producto como:

$$(ax^n)\cdot(bx^m)=a\cdot b\cdot x^{n+m}$$

Ejemplo 12: $3x^3\cdot 5x^7=3\cdot 5\cdot x^{3+7}=15x^{10}$

Para multiplicar dos polinomios se aplica la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, es decir, se multiplica cada termino del primero por cada término del segundo y luego se suman los términos semejantes.

Ejemplo 13: sean $P=2-6x+3x^2+7x^4-x^5$ y $Q=2+3x-4x^2$

Queremos encontrar el polinomio $P \cdot Q$. Disponemos los cálculos de la siguiente manera:

P			-1	7	0	3	-6	2
Q						-4	3	2
2.P			-2	14	0	6	-12	4
3x.P		-3	21	0	9	-18	6	
-4x^2.P	4	-28	0	-12	24	-8		
4		-31	19	2	33	-20	-6	4

Por lo tanto:

$$P \cdot Q = 4 - 6x - 20x^2 + 33x^3 + 2x^4 + 19x^5 - 31x^6 + 4x^7$$

En símbolos, si

$$P = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots\ldots + a_n.x^n \qquad (a_n \neq 0)$$
$$Q = b_0 + b_1.x + b_2.x^2 + \ldots\ldots + b_m.x^m \qquad (b_m \neq 0)$$

Entonces:

$$P \cdot Q = a_0b_0 + (a_0b_0 + a_1b_0).x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0).x^2 + \ldots\ldots + a_nb_m.x^{n+m}$$

Esto es, coeficiente del termino de grado i del producto se obtiene sumando todos los productos de la forma a_kb_j con $k + j = i$. En el ejemplo anterior el coeficiente de grado uno del producto es:

$$a_0b_0 + a_1b_0 = (2) \cdot (3) + (-6) \cdot (2) = 6 - 12 = -6$$

Si P y Q son polinomios no nulos se verifica que:

$$gr(P \cdot Q) = gr(P) + gr(Q)$$

Propiedades del producto

1. Asociatividad:

   Si P,Q yT son polinomios entonces P·(Q·T)=(P·Q) ·T
2. Conmutatividad:

   Si P y Q son polinomios entonces P·Q=Q·P
3. Existencia del elemento neutro: el polinomio $1x^0$ que indicamos simplemente por I, es el elemento neutro para el producto de polinomios, esto es que I·P=P para todo polinomio P.
4. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma

   Si P,Q yT son polinomios entonces P·(Q+T)=P·Q+P·T

Estas propiedades, lo mismo que las de la suma, son consecuencia de la definición de las operaciones entre polinomios y de las propiedades de los números reales.

Observaciones:

1. No vale la propiedad de existencia de inverso multiplicativo, es decir, dad un polinomio P, no existe, en general, un polinomio Q tal que P·Q=1. En efecto, si tal Q existe, P debe ser distinto de cero; luego tomando grados resulta gr(P.Q)=gr(P)+gr(Q)=gr(1)=0. Como el grados es siempre mayor o igual a cero, la única posibilidad es que gr(P)=0. Es decir, que únicamente tiene inverso multiplicativo los polinomios de grado cero. En este caso,

   si $P = ax^0$, su inverso es $P^{-1} = a^{-1} \cdot x^0$

2. Si $P = a$ y $Q = b_0 + b_1.x + b_2.x^2 + \ldots\ldots + b_m.x^m$ es

$$P \cdot Q = (a \cdot b_0) + (a \cdot b_1).x + (a \cdot b_2).x^2 + \ldots\ldots + (a \cdot b_m).x^m$$

Es decir que para multiplicar un polinomio por una constante basta con multiplicar cada coeficiente por la constante.

2.2.4 División de polinomios

Sean P y Q polinomios, Q distinto de cero, existe siempre un único par de polinomios C y R que verifican:

1. $P = C \cdot Q + R$
2. $R = 0$ o $gr(R) < gr(Q)$

El polinomio P se denomina dividendo y el polinomio Q divisor. Llamaremos a C el cociente y a R el resto de la división de P por Q.
Sean entonces

$$P = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots\ldots + a_n.x^n \qquad \text{y}$$
$$Q = b_0 + b_1.x + b_2.x^2 + \ldots\ldots + b_m.x^m \quad , \quad (b_m \neq 0)$$

Si $P = 0$ o $gr(P) < gr(Q)$ bastará tomar C=0 y R=P, pues podemos escribir $P = Q \cdot 0 + P$ y verifican ambas condiciones.
Ejemplo 14: sean $P = -4x^3 - 6 + 5x$ y $Q = 2x - 3$
Para efectuar la división de los polinomios deben estar ordenados según las potencias decrecientes de x y el polinomio dividendo debe estar completo.
$P = -4x^3 + 0x^2 + 5x - 6$ ordenado y completo
$Q = 2x - 3$ ordenado
Para efectuar la división de P por Q adoptaremos la siguiente disposición práctica:

$$\begin{array}{r|l}
-4x^3 + 0x^2 + 5x - 6 & \quad 2x - 3 \\ \cline{2-2}
+4x^3 + 6x^2 \qquad\qquad & -2x^2 - 3x - 2 \\ \cline{1-1}
-6x^2 + 5x - 6 & \\
+6x^2 - 9x \qquad & \\ \cline{1-1}
-4x - 6 & \\
+4x - 6 & \\ \cline{1-1}
-12 &
\end{array}$$

Luego:
El cociente $C = -2x^2 - 3x - 2$ y el resto $R = -12$
Si el dividendo es un polinomio de grado n y el divisor es de la forma $x - a$, el cociente es un polinomio de grado $n - 1$, con el mismo coeficiente principal que el dividendo, el resto es un polinomio nulo o un polinomio constante.
Ejemplo 15: sean $P = 5x^3 - 14x + 3$ y $Q = x - 2$
$P = 5x^3 + 0x^2 - 14x + 3$ ordenado y completo
$Q = x - 2$ ordenado

$$\begin{array}{r|l}
5x^3 + 0x^2 - 14x + 3 & \quad x - 2 \\ \cline{2-2}
-5x^3 + 10x^2 \qquad\qquad & 5x^2 + 10x + 6 \\ \cline{1-1}
10x^2 - 14x + 3 & \\
-10x^2 + 20x \qquad & \\ \cline{1-1}
6x + 3 & \\
-6x + 12 & \\ \cline{1-1}
15 &
\end{array}$$

Luego:

El cociente $C = 5x^2 + 10x + 6$ y el resto $R = 15$
En este caso el esquema se puede simplificar aplicando la “regla de Ruffini”
En el ejemplo anterior, escribiendo solo los coeficientes:

$5 + 0 - 14 + 3$	$1 - 2$
$-5 + 10$	$5 \quad 10 \quad 6$
$10 - 14$	
$-10 + 20$	
$6 + 3$	
$-6 + 12$	
15	

Omitimos aquellos coeficientes que son evidentes repeticiones; el primer término en las líneas 2ª,4ª,6ª,……. y el segundo término en las líneas 3ª,5ª,7ª,……comprimimos los términos restantes y escribimos el primer coeficiente, 5, en la tercera línea y observamos que el 1 del divisor puede omitirse, nos queda

5	0	-14	3	-2
	-10	-20	-12	
5	10	6	15	

Los coeficientes del cociente también se omiten puesto que aparecen como los primeros tres coeficientes en la tercera línea, en tanto que el resto, 15, aparece como el ultimo numero.
El último paso de simplificación es reemplazar las sustracciones por sumas, esto es, cambiar los signos del divisor (-2 por 2) y en la segunda línea. Así

5	0	-14	3	2
	10	20	12	
5	10	6	15	

Esta disposición representa la división abreviada de $5x^3 - 14x + 3$ por $x - 2$. Da como cociente $5x^2 + 10x + 6$ y como resto, 15.
Resumamos el proceso de división abreviada. Para dividir un polinomio P por un binomio (x-a), dispóngase en una línea (en orden de potencias descendentes) los coeficientes de P, colocando cero como coeficiente de toda potencia de x que falte y escríbase “a” a la izquierda. Bájese el primer coeficiente de P al primer lugar de la tercera línea. Multiplíquese este primer coeficiente por “a”, escribiendo el producto en la segunda línea, bajo el segundo coeficiente de P. La suma de este producto y el segundo coeficiente se coloca en la tercera línea. Multiplíquese esta suma por “a”, súmese el producto al coeficiente siguiente de x, escribiendo otra vez la nueva suma en la tercera línea y así, sucesivamente, hasta sumar un producto al último coeficiente de P.
La última suma en la tercera línea es el resto. Los números que preceden a esta representan los coeficientes de las potencias de x, dispuestas en orden decrecientes. El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al de P.
Ejemplo 16: mediante división abreviada, determínese el cociente y el resto de
$P = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ dividido por $Q = x + 3$
En este ejemplo $x - a = x - (-3)$, de modo que $a = -3$

	2	+3	-4	+5	+6
a= -3		-6	+9	-15	+30
	2	-3	5	-10	36

El cociente es entonces $C = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 10$ y el resto $R = 36$

2.3 Divisibilidad y raíces

Sean P y Q polinomios, Q≠0. En el caso particular en que el resto de la división de P por Q es 0 decimos que la división es exacta, o que P es un múltiplo de Q, o Q es un factor de P, o bien que Q divide a P.
Decir entonces que Q divide a P es expresar que existe un polinomio (necesariamente único) T tal que P=Q·T. Al polinomio T se lo suele representar por T=P/Q.
Ejemplo 17: $Q = x - 2$ divide a $P = x^2 - 5x + 6$ pues

$$P = x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Propiedades:

1. Q divide a P si y solo si el resto de dividir P por Q es igual a cero. Por supuesto, suponemos Q≠0. Si Q divide a P, existe T tal que P=Q·P. Llamando C al cociente y R al resto de la división de P por Q, valen las expresiones:

   $$P = Q \cdot T + 0 \qquad\qquad P = Q \cdot C + R$$

   Por unicidad de cociente y resto resulta que T=C y R=0.

   Recíprocamente, si el resto es cero, se tiene P=Q·T+0, o sea P=Q=T, luego Q divide a P.

   Obsérvese que esta propiedad nos brinda la posibilidad de poder decidir, mediante un simple cálculo, si un polinomio divide a otro.

Ejemplo 18: si $P = 2x^3 + 3x - 1$ y $Q = x + 1$, Q no divide a P, pues el resto de dividir P por Q es -6 (verifíquelo).

2. El polinomio 0 es múltiplo de cualquier P, 0=P·0
3. Todo polinomio P es múltiple de si mismo pues P=P·1
4. Si “a” es un número real distinto de cero y P es un polinomio, entonces “a” divide a P.

En efecto, por razones de grado, el resto de dividir P por “a” debe ser cero. Mas directamente, si $P = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots\ldots + a_n.x^n$, podemos escribir

$$P = a \cdot \left(\frac{a_0}{a} + \frac{a_1}{a}x + \cdots \ldots + \frac{a_n}{a}x^n\right)$$

5. Si Q divide a P y P es distinto de 0, entonces gr(Q)≤gr(P). por hipótesis podemos expresar P=Q·T, luego tomando grados tenemos que:

   $$gr(P) = gr(Q) + gr(T) \geq gr(Q)$$

2.3.1 Especialización, valuación o valor numérico de un polinomio

Sea “a” un número y P un polinomio de la forma $a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots\ldots + a_n.x^n$. Se llama especialización, valuación o valor numérico de P en a, al número

$$P(a) = a_0 + a_1.a + a_2.a^2 + \ldots\ldots + a_n.a^n$$

Vale decir al número que se obtiene reemplazando la independiente x por a, y efectuando las operaciones indicadas.
Ejemplo 19: sea $P = 5 + 2x - x^2 + 6x^3 - 7x^4$. Entonces:

$$P(1) = 5 + 2 \cdot 1 - 1^2 + 6 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^4 = 5$$

$$P(-2) = -163$$

$$P(0) = 5$$

Ejemplo 20: si $P = cx^0$, entonces $P(a) = c$ para todo número real a.
Se verifican las siguientes propiedades:

1. $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$

2. $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$

2.3.2 Teorema del resto

Sea “a” un número y P un polinomio. Entonces el valor numérico de P en “a” es igual al resto de dividir P por “x-a”.

Aplicando el algoritmo de división, escribimos:
$P = (x - a) \cdot Q + R$ donde Q es el cociente y R es el resto.
Considerando el valor numérico del polinomio P en a, tenemos

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R(a) = 0 \cdot Q(a) + R = R$$

Ya que, como x-a es un polinomio de grado uno, el resto R es cero o bien un polinomio de grado cero, o sea en cualquier caso es un número real.
Ejemplo 21: el resto de dividir $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ por $x - 2$ es $P(2) = 7$.
Ejemplo 22: el resto de dividir $3x^4 - 6x^2 + 4x + 8$ por $x + 1$ es $P(-1) = 1$.

2.4 Raíz de un polinomio

Sea a un polinomio real y P un polinomio. Decimos que “a” es raíz (o cero) de P si P(a)=0. Diremos que en ese caso P se anula en “a”.

Ejemplo 23: 2 y 3 son raíces o ceros del polinomio $P = x^2 - 5x + 6$
Ejemplo 24: -1 es raíz de $P = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

2.4.1 Corolario del teorema del resto

Un numero “a” es raíz de un polinomio P si y solo si “x-a” divide a P. En efecto, por el teorema del resto, P(a) es el resto de dividir P por “x-a”. Luego si “a” es raíz, o sea si P(a) =0, el resto de dividir P por “x-a” es cero, luego “x-a” divide a P.

Ejemplo 25: 1 es raíz del polinomio $P = x^2 - 3x + 2$ pues $P(1) = 0$
o equivalentemente $x - 1$ divide a P, $P = (x - 1)(x - 2)$

2.4.2 Orden de multiplicidad de una raíz

Diremos que un número “a” es raíz con orden de multiplicidad “m” de un polinomio P, si $(x - a)^m$ divide a P, y $(x - a)^{m+1}$ no lo divide.
Las raíces de orden de multiplicidad “1” son las raíces simples. Las raíces de orden de multiplicidad “2” son las raíces dobles, las raíces de orden de multiplicidad “3” son las raíces triples, etc.

Ejemplo 26: sea $P = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x + 2)^3(x - 1)$
Decimos que -2 es raíz triple y 1 es raíz simple de P.
A fin de determinar el número de raíces que tiene un polinomio de grado $n \geq 1$ enunciaremos el siguiente teorema: “Todo polinomio de grado $n \geq 1$ admite por lo menos una raíz compleja”.
Si convenimos en contar cada raíz por su orden de multiplicidad, esto es, cada raíz simple como una raíz, cada raíz doble como dos raíces, cada triple como tres, etc., del teorema anterior se deduce el siguiente: “ todo polinomio de grado $n \geq 1$ admite exactamente n raíces complejas.”

2.4.3 Observaciones:

1. Si a es una raíz de un polinomio P resulta $P = (x - a) \cdot Q$ y considerando el valor numérico de P en un numero b, $P(b) = (b - a) \cdot Q(b)$.

De aquí deducimos que toda raíz de Q es raíz de P, y que toda raíz de P distinta de a es raíz de Q. Es decir que, conocida una raíz, el problema del cociente, con la ventaja de que este es de menor grado.

2. Si P es un polinomio, determinada una de sus raíces, es conveniente estudiar su orden de multiplicidad.

Ejemplo 27: Sea $P = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$ y sabiendo que -2 es raíz de P, determinar su orden de multiplicidad

	1	5	6	-4	-8
-2		-2	-6	0	8
	1	3	0	-4	0

Es entonces $P = (x+2)\cdot(x^3 + 3x^2 - 4)$ y $Q_1 = x^3 + 3x^2 - 4$

Verificamos si $(x+2)$ divide a Q_1:

	1	3	0	-4
-2		-2	-2	4
	1	1	-2	0

$P = (x+2)^2 \cdot (x^2 + x - 2)$ y $Q_2 = x^2 + x - 2$

Verificamos si $(x+2)$ divide a Q_2:

	1	1	-2
-2		-2	2
	1	-1	0

$P = (x+2)^3 \cdot (x-1)$ y $Q_3 = x - 1$

Como $(x+2)$ no divide a Q_3 , el orden de multiplicidad de la raíz -2 resulta m=3, es decir que -2 es una raíz triple de P.

3. Sea $P = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots\ldots + a_n.x^n$ y $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ sus n raíces, entonces podemos escribir P como:

$$P = a_n(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot \ldots\ldots\cdot(x - x_n)$$

En el ejemplo anterior:

$P = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x+2)^3 \cdot (x-1) \qquad con \quad a_n = 1.$

2.5 Transformación de un polinomio en un producto

Factorizar un polinomio P significa transformarlo en el producto de una constante por uno o más polinomios primos de coeficiente principal igual a uno. Veremos a continuación algunos casos sencillos de factorización:

1. Extracción de factor común
    1. $A\cdot M + B\cdot M = M\cdot(A+B)$
    2. $A\cdot P + B\cdot P + A\cdot Q + B\cdot Q = P\cdot(A+B) + Q\cdot(A+B) = (A+B)\cdot(P+Q)$

2. Diferencia de cuadrado

$$X^2 - Y^2 = (X+Y)\cdot(X-Y)$$

3. Trinomio cuadrado perfecto

$$X^2 + 2\cdot X\cdot a + a^2 = (X+a)^2$$
$$X^2 - 2\cdot X\cdot a + a^2 = (X-a)^2$$

4. Cuatrinomio cubo perfecto

$$X^3 + 3 \cdot X^2 \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y^2 + Y^3 = (X + Y)^3$$

$$X^3 - 3 \cdot X^2 \cdot Y + 3 \cdot X \cdot Y^2 - Y^3 = (X - Y)^3$$

5. Divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de las bases

   Como se puede verificar fácilmente:
   1. $X^n + a^n$ es divisible por $X + a$ si n es IMPAR
   2. $X^n + a^n$ nunca es divisible por $X - a$
   3. $X^n - a^n$ es divisible por $X + a$ si n es PAR
   4. $X^n - a^n$ siempre es divisible por $X + a$

Ejemplo 28: Sea $x^3 + 27 = x^3 + 3^3$ es divisible por x+3 ya que n es impar. Por el contrario, no es divisible por x-3. En efecto, si $x^3 + 27$ es divisible por x+3 existe un polinomio Q tal que

$$x^3 + 27 = (x + 3) \cdot Q$$

Calculamos Q por la regla de Ruffini

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	0

Entonces $x^3 + 27$ admite la factorización:

$$x^3 + 27 = (x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 9)$$

2.6 Ejercitación de la unidad 2

Ejercicio 1. En los siguientes ejercicios efectuar las operaciones indicadas

a) $(x^4 + 3x^2 - x - 5) + (x^3 - 7x^2 + 9x - 12)$

Rta: $x^4 + x^3 - 4x^2 + 8x - 17$

b) $(2x^3 + 3x^2 - 7x + 5) - (4x^3 - 5x^2 + 3x - 3)$

Rta: $-2x^3 + 8x^2 - 10x + 8$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}x + \frac{1}{5}x^2\right) + \left(\frac{7}{2} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x^2\right)$

Rta: $4 + x + x^2$

d) $3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 2x - 7)$

Rta: $6x^3 - 9x^2 + 6x - 21$

e) $\frac{1}{2}(x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 2x + 8) - \frac{1}{3}(9x^3 - 6x^2 + 12x + 3)$

Rta: $\frac{1}{2}x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$

f) $(2x - 3) \cdot (3x + 5)$

Rta: $6x^2 + x - 15$

g) $(2x^3 + 2x^2 - 4x + 6) \cdot (-5x^3 + 4x^2 - 2x - 1)$

Rta:$-10x^6 - 2x^5 + 24x^4 - 52x^3 + 30x^2 - 8x - 6$

h) $7(-x^2 + 5x) + 5(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) \cdot (x - 2) - 3(x^2 - 1) \cdot (x + 1)$

Rta:$5x^4 - 23x^3 + 20x^2 + 13x + 13$

i) $(6x^3 + x^2 - 1) - (2x^3 - 3x^2 - 4) - (-4x^2 - 7x + 1)$

Rta: $4x^3 + 8x^2 + 7x + 2$

j) $3x + 2 + x\{4x + 3[2 - 5x(x + 1) - x] - 4x\} + 2 - x$

Rta: $-15x^3 - 18x^2 + 8x + 4$

k) $(2x - 7y) \cdot (2x + 7y)$

Rta: $4x^2 - 49y^2$

l) $(3x^2 + 2y^3) \cdot (3x^2 - 2y^3)$

Rta: $9x^4 - 4y^6$

m) $(x^3 - 3x^2 - 2x + 1) \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$

Rta: $x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 4x^2 + 4x - 1$

n) $\frac{(11x^4)^0(12x^0)}{6x}$

Rta: $\frac{2}{x}$

o) $\frac{(5x^2)^4(4x^4)^2}{(2x^8)^3}$

Rta: $\frac{1250}{x^8}$

p) $\frac{14x^8y^4 - 10x^6y^5}{2x^4y^4}$

Rta: $7x^4 - 5x^2y$

q) $4x^3(3x^2y - 6xy^4)$

Rta: $12x^5y - 24x^4y^4$

r) $-x^8y^7(x^7y^{11} - x^6y^9)$

Rta: $-x^{15}y^{18} + x^{14}y^{16}$

Ejercicio 2. En los siguientes ejercicios calcular el cociente y el resto de la división de P por Q.

a) $P = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4; Q = x^3 - 2x + 1$

Rta: $C = x - 2; R = -x^2 - 2$

b) $P = 2x^3 - 5x + 3\ ; Q = x^2 - 2x + 4$

Rta: $C = 2x + 4; R = -5x - 13$

c) $P = \frac{2}{3}x^3 - 5x + 2\ ; Q = 2 - x^2 - 3x$

Rta: $C = -\frac{2}{3}x + 2; R = \frac{7}{3}x - 2$

d) $P = 3 + 4x^5 - 2x + 7x^3;\ Q = \frac{1}{2} + x^3 - 2x$

Rta: $C = 4x^2 + 15; R = -2x^2 + 28x - \frac{9}{2}$

e) $P = 8x^3 + 12x^2 - 14x + 7;\ Q = 4x^2 + 8x - 3$

Rta: $C = 2x - 1; R = 4$

f) $P = 6x^4 + 5x^3 - x^2 + 14x + 1;\ Q = 2x^2 + 3x - 1$

Rta: $C = 3x^2 - 2x + 4; R = 5$

g) $P = x^4 - 14x^2 + 1;\ Q = x^2 - 4x + 1$

Rta: $C = x^2 + 4x + 1; R = 0$

h) $P = x^7 + x^5 + x^3 - x^2 - x - 1;\ Q = x^2 + x + 1$

Rta: $C = x^5 - x^4 + x^3 - 1; R = 0$

Ejercicio 3. En los siguientes ejercicios calcular el cociente y el resto aplicando la regla de Ruffini.

---

a) $P = x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x + 5; Q = x - 2;$ $\quad Rta: C = x^3 + 7x^2 + 12x + 23,\ R = 51$

b) $P = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 3; Q = x + 1;$ $\quad Rta: C = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1,\ R = 2$

c) $P = x^5 - 2x^2 + 3 - 6x^3 + 5x; Q = x - 3;$ $\quad Rta: C = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 7x + 26, R = 81$

d) $P = x^3 + 5x^2 - 2x - 3 \quad Q = x - 1$ $\quad Rta: C = x^2 + 6x + 4,\ R = 1$

e) $P = -x^3 + 7x^2 + 15x - 8 \quad Q = x + 2$ $\quad Rta: C = -x^2 + 9x - 3,\ R = -2$

f) $P = x^4 + x^3 - 3x + 6 \quad Q = x - 2$ $\quad Rta: C = x^3 + 3x^2 + 6x + 9,\ R = 24$

g) $P = 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 7 \quad Q = x + 1$ $\quad Rta: C = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 8,\ R = 1$

Ejercicio 4. En los siguientes ejercicios calcular P(a):

---

a) $P = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ $\quad a = 2$ $\quad Rta: P(a) = -7$

b) $P = 8x^5 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ $\quad a = -1$ $\quad Rta: P(a) = -10$

c) $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \ldots + a_0$ $\quad a = 0$ $\quad Rta: P(a) = a_0$

Ejercicio 5. Hallar el resto que se obtiene al dividir el polinomio dado por el binomio que le sigue:

---

a) $x^3-3x^2+4x-5; \quad x-2$ Rta:-1

b) $x^3+3x+5; \quad x+1$ Rta:1

c) $2x^3-7x^2+5x+3; \quad x-1$ Rta:3

d) $2x^4+3x^3+7x^2+6x+2; \quad x+1$ Rta:2

Ejercicio 6. En los siguientes ejercicios indicar si es exacta la división de P por (x-a)

a) $P=x^4+2x^3+3x-6$ $a=1$ $Rta: si\ es\ exacta$

b) $P=-2x^3+5x^2-3x+2$ $a=-1$ $Rta: no\ es\ exacta$

c) $P=x^3+3x^2-8x-4$ $a=2$ $Rta: si\ es\ exacta$

Ejercicio 7. Calcular las raíces del polinomio

$P=x^3-5x^2$ $Rta: 0\ doble; 5\ simple$

Ejercicio 8. Mostrar que el binomio x-a es un factor del polinomio dado:

a) $2x^3+3x^2-6x+1; \quad x-1$

Solución: Aplicando Ruffini

	2	3	-6	1
1		2	5	-1
	2	5	-1	0

Como el resto es cero, decimos que la división es exacta, por lo tanto x-1 es un factor del polinomio dado

b) $5x^4+8x^3+x^2+2x+4; \quad x+1$

c) $x^3-4ax^2+2a^2x+a^3; \quad x-a$

d) $3x^3+2x^2-4x+1; \quad x-\frac{1}{3}$

e) $x^3-3x^2+x-3; \quad x-i$

f) $x^4-2x^2-3; \quad x+i$

Ejercicio 9. Calcule el valor de k para el cual x-a sea un factor del polinomio dado

a) $x^3+2x^2+4x+k; \quad x+1$ Rta: k=3

Solución:

Un método es aplicando Ruffini

	1	2	4	K

-1		-1	-1	-3
	1	1	3	k-3

Luego para quex+1 sea un factor del polinomio dado el resto debe ser nulo hacemos

$k-3=0 \therefore k=3$

b) $-x^3+3x^2+kx-4; \quad x-1$ Rta: k=2

c) $x^4-2x^3-x^2-3x-k; \quad x-2$ Rta: k= -10

Ejercicio 10. Determinar el valor de b para que el siguiente polinomio sea divisible por (x-2).

$P = x^3 - bx^2 + 5x - 1$ $Rta: b = \frac{17}{4}$

Ejercicio 11. Diga cuál es el grado de la función polinomial, halle los ceros de la misma e indique cual es su multiplicidad.

a) $f(x)=(x+4)^5 \cdot (x+2)^2 \cdot (x-3)^3$ Rta: grado=10; -4 orden 5; -2 orden 2; 3 orden 3

b) $f(x)=(3x+17)^3 \cdot (3x+12)^4$ Rta: grado=7; -17/3 orden 3; -4 orden 4

Ejercicio 12. Determinar el polinomio de tercer grado, cuyas raíces son los números 2, -1, y 3, y el coeficiente de x^3 es el número 1.

$Rta: x^3 - 4x^2 + x + 6$

Ejercicio 13. Determinar el polinomio de cuarto grado, cuyas raíces son los números 1, -1, 2 y 5 y tal que $f(0) = 6$.

$Rta: -\frac{3}{5}x^4 + \frac{21}{5}x^3 - \frac{27}{5}x^2 - \frac{21}{5}x + 6$

Ejercicio 14. Determinar si el número 2 es raíz del polinomio $\mathrm{P} = \mathrm{x}^4 - 5\mathrm{x}^3 + 8\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x}$.
En caso afirmativo, dar su multiplicidad y, si es posible, las demás raíces.

$Rta: 2\ doble; 1\ simple; 0\ simple$

Ejercicio 15. Calcule todos los ceros de f(x).

a) $f(x)=x^3-2x^2-x+2$.Un cero es -1. Rta: -1,1,2.

b) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$.Un cero es 1 de multiplicidad 2. Rta:1,-1,-2

c) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-12x+8$.Dos ceros son 1y2. Rta:1,2,2i,-2i

d) $f(x)=x^3+x^2+x+1$.Un cero es i. Rta:-1,i,-i

e) $f(x)=4x^3+9x^2+22x+5$.Un cero es -1+2i. Rta:-1/4,-1+2i,-1-2i

---

Ejercicio 16. Factorizar las siguientes expresiones.

---

a) $14x^2-42xy$ $Rta: 14x(x-3y)$

b) $3x^3-6x^2+9x$ $Rta: 3x(x^2-2x+3)$

c) $9x^4-16x^6$ $Rta: x^4(3+4x)(3-4x)$

d) x^4-81y^4 $Rta: (x^2+9y^2)(x+3y)(x-3y)$

e) $x^2-14x+49$ $Rta: (x-7)^2$

f) $12x^2-13x$ $Rta: x(12x-13)$

g) $xy-3x+2y-6$ $Rta: (x+2)(y-3)$

3

Funciones

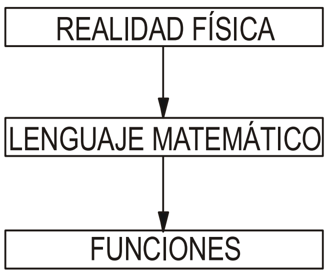
Objetivos
Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- Operar con conjuntos.
- Comprender la correspondencia entre puntos de la recta y números reales.
- Aplicar el concepto de intervalo en las relaciones y funciones.
- Comprender el concepto de función.
- Utilizar las funciones de primer grado, de segundo grado en situaciones problemáticas.

Contenidos

1. Conjuntos y subconjuntos.
2. Operaciones con conjuntos.
3. Par ordenado. Producto cartesiano.
4. Correspondencia entre producto de la recta y números reales.
5. Pares ordenados de números reales.
6. Conjuntos de puntos. Intervalos.
7. Relación y sus representaciones.
8. Funciones. Definición.
9. Funciones de primer y segundo grado.

Esquema Conceptual



Introducción
En esta unidad se considera el concepto de conjunto y sus operaciones. El producto cartesiano con la noción de par ordenado. La correspondencia entre puntos de la recta y números reales. Los intervalos, como conjuntos de puntos. Las relaciones y sus distintas representaciones.
El concepto de función como caso particular de una relación y las funciones de primer grado y de segundo grado.

Orientación del aprendizaje
Lea la introducción teórica de cada tema y desarrolle personalmente los ejemplos que le siguen. Realice la ejercitación correspondiente.

Bibliografía de la unidad:

- Englebert, S., Pedemonti S., Semin, S., “Matemática 3”. AZ editora.
- De Simone, I., Turner, M., “Matemática 4”. AZ editora.
- Tapia, N., Bibiloni, A., Tapia , C., “Matemática 3” y “Matemática 4”. Editorial Estrada.

3.1. Funciones

3.1.1. Conjuntos y subconjuntos.

En lo que sigue y en medida de lo posible, usaremos letras mayúsculas para detonar los conjuntos. Los conjuntos están formados por objetos que se acostumbra a llamar elementos o miembros y que denotaremos con letras minúsculas. Si A es un conjunto y a es un elemento del conjunto A, escribimos

$$a \in A$$

y leemos “a pertenece a A”

Si queremos destacar que el objeto a no es un elemento del conjunto A, escribimos

$$a \notin A$$

y leemos: “ a no pertenece a A”

Un conjunto está bien definido cuando, dado un objeto arbitrario, puede establecerse si el mismo pertenece o no pertenece al conjunto.
Hay dos maneras muy usadas de describir un conjunto. Una es la llamada descripción por extensión que consiste en poner entre llaves todos los elementos del conjunto en cuestión.

Ejemplo

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Significa que el conjunto A es el formado por los elementos a, b, c, d.
Otra forma de describir un conjunto, usado principalmente cuando el conjunto tiene muchos elementos, es a la llamada descripción por compresión, que consiste en describir un conjunto por alguna propiedad que caracteriza a sus elementos. En éste caso representaremos el conjunto en la forma

$$A = \{x/P(x)\}$$

y leemos “A es el conjunto de todos los “x” tales que “x” tiene la propiedad P”

Ejemplo:

N = {n/n es un número natural} (= {1, 2, 3,...})

Si A y B son conjuntos y todo elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B, escribimos $A \subset B$ y leemos “A está contenido en B” ó “A es parte de B” ó ”B contiene a A”, ó “A es un subconjunto de B”.
La notación $A \not\subset B$ significa que A no está contenido en B y esto a su vez quiere decir, de acuerdo con la definición, que hay algún elemento de a que no es elemento de B.
Si $A \subset B$ y $B \subset A$, escribimos $A = B$ y decimos que los conjuntos A y B son iguales, es decir que tienen los mismos elementos.
Por supuesto que la notación $A \neq B$ significa a su vez que A y B no son iguales, es decir, hay algún elemento de A que no es parte de B o algún elemento de B no es parte de A.

Si escribimos $A \subsetneq B$ queremos significar que A es parte de B y es distinto de B, esto es, todo elemento de A lo es de B pero algún elemento de B no lo es de A. Es lo mismo decir
$A \subset B \wedge A \neq B$
Ejemplo: sea A= {n/n es natural y par}.
Entonces $A \subsetneq \mathbb{N}$ pues todo elemento de A es, en particular, un natural pero $1 \in \mathbb{N}$ y $1 \notin A$, esto dice que hay elementos de $\mathbb{N}$ que no lo son de A.
Se usa denotar con la letra griega ϕ al conjunto que no posee elementos y se lo llama por razones obvias, conjunto vacío.
El conjunto vacío es parte de cualquier conjunto, esto es, cualquiera sea el conjunto A se tiene

$$\phi \subset A$$

Se puede justificar este hecho razonando como sigue:
si para algún conjunto A tuviésemos $\phi \not\subset A$, esto significaría que algún elemento de ϕ no es elemento de A. ¡pero ϕ no tiene elementos!
Hay circunstancias en las que, todos los conjuntos involucrados son a su vez parte de otro conjunto que recibe el nombre de espacio o ambiente o conjunto universal y suele denotarse, por ello, con la letra U.
En este caso se suele llamar puntos a los elementos de universo o espacio U.
Dado el conjunto A que es parte de U, se llama complemento de A (respecto de U, si no está claro por el contexto) al conjunto de elementos (o puntos de U) que no están en A y se suele denotar por A^C ó A' ó CA ó $\bar{A}$.
A continuación damos la notación y algunas relaciones para los conjuntos usuales de números.
Ya hemos introducido el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Dicho conjunto $\mathbb{N}$ es parte del conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los números enteros. Además, 0, -1, -2, -3,... son también números enteros pero no naturales. Es decir,

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$$

Tenemos también el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales. Una descripción usual de $\mathbb{Q}$ es

$$\mathrm{Q} = \left\{ x \,/\, x = \frac{m}{n};\ m \in \mathrm{Z};\ n \in \mathrm{N} \right\}$$

Por ejemplo, son elemento de $\mathbb{Q}$ los números $\frac{1}{2}, \frac{-3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{-13}{-26} = \frac{1}{2}$, etc.
Está claro entonces que

$$\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$$

Pues, si $m \in \mathrm{Z}$, entonces $m = \frac{m}{1}$ y luego $m \in \mathrm{Q}$. Por otra parte, $-\frac{1}{2} \in \mathrm{Q}$ y $-\frac{1}{2} \notin Z$
Por último recordemos que ya hemos introducido el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales y ya hemos destacado que

$$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

al mencionar la presencia de números reales irracionales.

3.1.2. Operaciones con conjuntos

Dados dos conjuntos *A* y *B*, se define el conjunto $A \cup B$, que llamamos "unión de *A* y *B*" al siguiente

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

Esto es, el conjunto que contiene tanto los elementos de A como los elementos de B.

Además, podemos definir $A \cap B$, que llamamos "intersección de *A* y *B*", al siguiente

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \; y \; x \in B\}$$

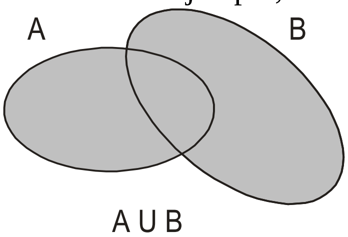
Es decir, $A \cap B$ es el conjunto formado por los elementos que tienen en común los conjuntos *A* y *B*.

Finalmente, daremos la definición de la "diferencia entre *A* y *B*" que notaremos *A*-*B*:

$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

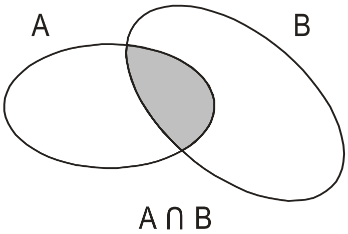
Esto es *A*-*B* es el conjunto formado con los elementos de *A* que no son elementos de *B*.

Para "visualizar" las definiciones anteriores es útil valerse de los "diagrama de Venn". En estos diagramas se simbolizan los conjuntos mediante figuras en el plano, y se destacan algunas partes de los mismos sombreándolas o rayándolas. Por ejemplo,



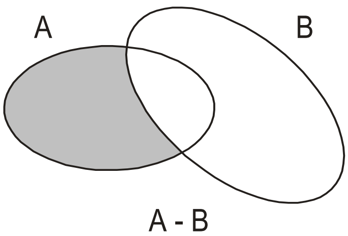
la zona rayada representa $A \cup B$.

Análogamente, en la figura



la zona rayada representa $A \cap B$.

En la figura que sigue



la zona rayada representa $A - B$

Resulta claro entonces que $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$, cualesquiera sean los conjuntos A y B. De la última figura resulta también claro que si elegimos convenientemente los conjuntos A y B entonces podemos lograr que

$$A - B \neq B - A$$

Es decir, las operaciones de unión e intersección de conjuntos son conmutativos pero no así la diferencia.

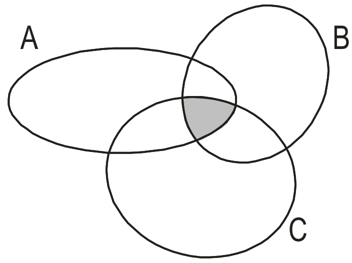
Las operaciones de unión e intersección de conjuntos son además asociativas, esto es, si A, B y C son tres conjuntos, entonces

I. $\left(A\cap B\right)\cap C = A\cap\left(B\cap C\right)$

II $\left(A\cup B\right)\cup C = A\cup\left(B\cup C\right)$

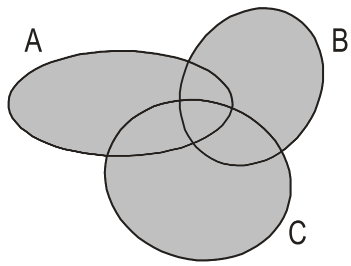
Ambas propiedades se verifican escribiendo la definición de los distintos miembros en cuestión. Además de verificar las propiedades I. y II. con las definiciones, es útil visualizarlas en un diagrama de Venn:

La zona rayada representa, $\left(A\cap B\right)\cap C = A\cap\left(B\cap C\right)$.



(A∩B)∩C =A∩(B ∩ C)

La zona rayada representa $\left(A\cup B\right)\cup C = A\cup\left(B\cup C\right)$.



(A U B) U C = a U (B U C)

Algunas propiedades fáciles de verificar son:

III. si $A\subset B$ entonces $A\cup B = B$ y $A\cap B = A$.

luego $A\cap\phi=\phi$ y $A\cup\phi = A$.

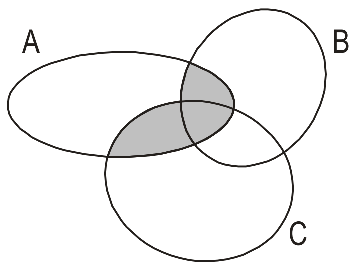
IV $A\subset A\cup B$ y $A\cap B\subset A$.

V $A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)$.

VI $A\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right)$.

Las propiedades (V) y (VI) son las llamadas propiedades de distributividad de la unión respecto de la intercepción y de la intersección respecto de la unión.

Lo visualizamos con un diagrama de Venn. Por ejemplo, en la figura



A∩(B U C) = (A∩B) U (A∩C)

la zona rayada representa el conjunto

$$A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right).$$

3.1.3. Par ordenado, producto cartesiano.

Así como no hemos "definido" lo que es un conjunto, no definiremos lo que es un par ordenado (no creemos que esto pueda invalidar lo que sigue). Nos contentamos con decir que un par ordenado es un objeto que denotaremos (a, b), donde "a" es un elemento (de algún conjunto A) que se llama primera componente del par ordenado y "b" es un elemento (de algún conjunto B que puede o no ser el mismo A) que se llama segunda componente del par ordenado.
Un par ordenado (a, b) queda entonces determinado por "a", "b" y por el orden en que "a" y "b" vienen dados. La propiedad básica a recordar es

(a, b) = (c, d) sí y solo si (a = c) y (b = d)

Resulta claro entonces que el par ordenado (a, b) no necesariamente es igual al par ordenado (b, a) y de allí su nombre.
Dados dos conjuntos A y B se llamará **producto cartesiano de A por B** al conjunto, denotado AxB, formados por todos los pares ordenados (a, b) con primera componente "a" en A y segunda componente "b" en B. En símbolos

$$\text{AxB} = \left\{ x / x = (a,b), a \in A, b \in B \right\}$$

3.1.4. Ejemplos de productos cartesianos

1. $A = \{1,2,3\}, B = \{x, y\}$. Entonces

$$\text{AxB} = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$$

Por otra parte, podemos también hacer

$$\text{BxA} = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\} \neq \text{AxB}$$

(entonces, el producto cartesiano de conjuntos **no** es una operación **conmutativa**).

2. $A = \{2,t\}$. Entonces

AxA={(2, 2), (2, t), (t, 2), (t, t)}

Nota: Se puede probar, aunque no lo haremos, que si A es un conjunto finito de m elementos y B es otro conjunto finito de n elementos, el conjunto AxB (y el conjunto BxA) tiene m.n elementos.

3.2. Correspondencia entre puntos de la recta y números reales

Es usual pensar el conjunto de los números reales como el conjunto de puntos de una recta, estableciendo una correspondencia "uno a uno" entre ambos conjuntos. Esta correspondencia se llama "un sistema de coordenadas en la recta".

Procedemos en la siguiente forma:

1°) Fijamos en la recta dos puntos arbitrarios, denotamos a uno de ellos (cualquiera) con el "0" y al otro con el número "1".

Diremos que el sentido positivo de la recta es el que va de "0" a "1" (en nuestro caso "hacia la derecha") y que el segmento de extremos "0" y "1" tiene longitud uno.

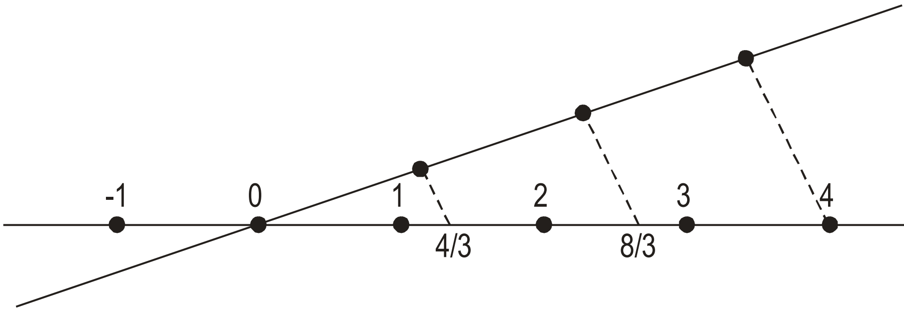
Señalaremos con el número "2" al punto de la recta situado a la derecha de "1" y tal que el segmento de extremos "1" y "2" tenga longitud uno; señalamos con el número "3" al punto de la recta situado a la derecha de "2" y tal que el segmento de extremos "2" y "3" tenga longitud uno; etc. En forma similar señalaremos a la izquierda de "0", sucesivamente, los punto "-1", "-2", "-3"... tal que los respectivos segmentos tengan longitud unitaria.

En esta forma podemos pensar que todos los números enteros están ubicados sobre la recta.

2°) La geometría elemental enseña a dividir un segmento en “n” partes iguales (donde “n” es un número natural). Esto permite ubicar sobre la recta a todos los números racionales.

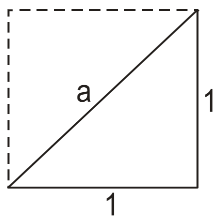
Dado el número racional $\frac{m}{n}$ (que podemos suponer escrito con $n > 0$) dividimos el segmento de extremos “0” y “m” en “n” partes iguales; la marca más próxima de cero es el punto que representa al número $\frac{m}{n}$.

La figura siguiente ilustran la forma de ubicar el punto $\frac{4}{3}$.



Si A es un punto de la recta asociada al número racional m/n, este número expresa la longitud del segmento $\overline{OA}$ respecto del segmento unidad; diremos que el segmento $\overline{OA}$ es “conmensurable” con el segmento unidad elegido.
(<u>Observación:</u> en la unidad 1 se desarrolló otra forma de graficar un número racional).

3°) Es un hecho conocido desde la antigüedad que no todo segmento es conmensurable con uno elegida como unidad. El ejemplo clásico es el de la diagonal del cuadrado construido sobre el segmento unidad.

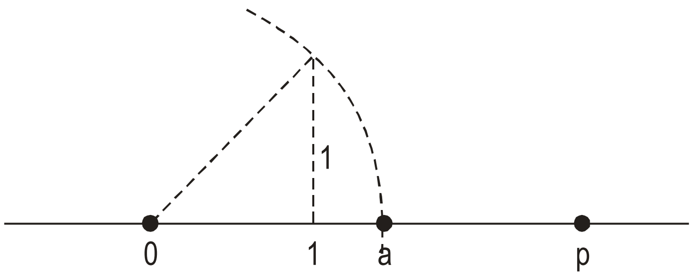


Si la longitud de la diagonal se expresa por el número “a” debe tenerse.

$$a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Ningún número racional tiene por cuadrado al número 2

La construcción ubicada en la figura siguiente muestra como ubicar en la recta “r” el punto A de modo tal que el segmento $\overline{OA}$ tenga la misma longitud que la diagonal del cuadrado cuyo lado el segmento unidad.

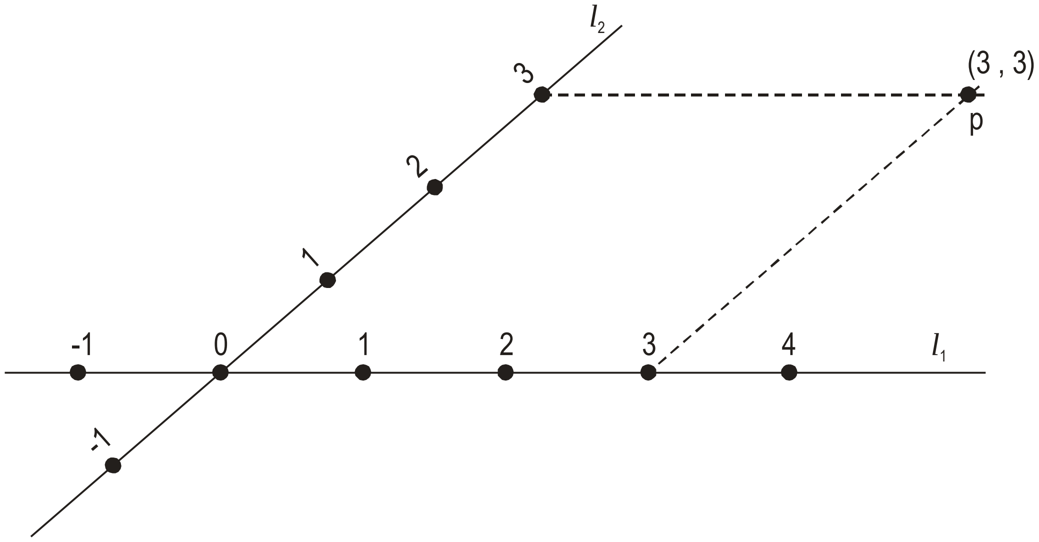


El segmento $\overline{OA}$ no es conmensurable con el segmento unidad y, por lo tanto, el punto A no está asociado a ningún número racional.
La existencia de segmentos inconmensurables con un segmento unidad elegido se traduce en el hecho de que **los números racionales no llenan la recta.**

Señalaremos sobre la recta el punto P arbitrario; puede ocurrir que el segmento de extremos "O" y "P" sea conmensurable con el segmento unidad o no.
En el primer caso, el punto P esta en correspondencia con un número racional.
En el segundo caso se puede mostrar (aunque no lo haremos) que está asociado a un decimal ilimitado no periódico, es decir a un número irracional. Recíprocamente, a todo decimal ilimitado no periódico se le asocia un punto de la recta.
Resumiendo: a toda número real le corresponde un punto en la recta; a todo punto en la recta le corresponde un número real.
El número real asociado a un punto de la recta se llama la "coordenada" (ó la abscisa) del punto.

3.3. Pares ordenado de Números Reales

Uno de los ejemplos más importantes de producto cartesiano es RxR (se usa escribir R x R= R^2), es decir el conjunto de los pares ordenados de números reales.
Este conjunto se identifica con el conjunto de puntos del plano estableciendo un sistema de coordenadas como se escribe a continuación.
Se eligen arbitrariamente, dos rectas que se cortan "l_1" y "l_2". El punto de intersección se señala con "O" para ambas rectas; se eligen en cada recta otro punto que se señala con "1".
Para ubicar el punto del plano asociado al par ordenado (a, b), se señala la recta "l_1" el punto de coordenadas "a" y en "l_2" el punto de coordenadas "b"; se trazan por estos puntos paralelas a "l_2" y a "l_1" respectivamente; el punto "P" de intersección de estas paralelas es el punto asociado a (a, b).
La figura ilustra la ubicación del par (3, 3). Recíprocamente, si P es un punto de plano, la paralela a "l_2" trazado por P determina sobre "l_1" un número "a" y a la paralela a "l_1"trazado por P determina sobre "l_2" un número "b". Haremos corresponder el par (a, b) al punto P.
La recta "l_1"se llama "1[er] eje" ó "eje de la abscisas" (ó eje de las "x"); la recta "l_2" se llama "2[do] eje" o "ejes de las ordenadas" (ó ejes de las "y"). Si "p" es el punto correspondiente al par (a, b), el número "a" es la abscisa ó primer coordenada de "P"; el número "b" es la ordenada ó segunda coordenada de "P".



Es conveniente destacar que los puntos de los ejes, en cuanto puntos del plano, quedan identificados con pares ordenados de números; los puntos del primer eje tienen segunda coordenada nula; los puntos del segundo eje tienen primera coordenada nula.
Habitualmente los ejes se toman **perpendiculares** y se adopta la misma unidad de longitud en ambos, pero estas condiciones no son necesarias para la identificación de R^2 con el plano.
Cuando se imponen las condiciones antedichas el sistema de coordenadas se llama "cartesiano".

3.4. Conjunto de puntos: Intervalos

Los intervalos de puntos comprendidos en la recta real entre dos puntos “a” y “b” (llamados “extremos”) surgen con tanta frecuencia que es conveniente disponer de nombres especiales para ellos.

a) El conjunto de número reales formado por “a”, “b” y todos los comprendidos entre ambos recibe el nombre de INTERAVALO CERRADO y lo designaremos [a, b].

$$[a, b] = \{x \,/\, x \in R \;\; y \;\; a \leq x \leq b\}$$

La siguiente figura representa a [a, b]:

b) El conjunto de números reales comprendidos entre “a y “b” se denomina INTERVALO ABIERTO, y se designa]a, b[ó también (a, b).

$$]a, b[= \{x \,/\, x \in R \;\; y \;\; a < x < b\}$$

La representación usual de]a, b[suele ser:

En ambos casos la longitud del intervalo es el número positivo ($b - a$).

c) Estas definiciones pueden extenderse a INTERVALOS SEMIABIERTOS o SEMICERRADOS

Semiabierto a izquierda ó semicerrado a derecha

$$]a, b] = \{x \,/\, x \in R \;\; y \;\; a < x \leq b\}$$

Semiabierto a derecha ó semicerrado a izquierda

$$[a, b[= \{x \,/\, x \in R \;\; y \;\; a \leq x < b\}$$

d) Finalmente, se puede generalizar considerando la semirecta y la recta como intervalos usando los símbolos $-\infty$ e ∞. Debe tenerse mucho cuidado en estos casos, ya que estos símbolos se usan solamente por conveniencia de notación y nunca como números reales.

$$[a, \infty[= \{x \,/\, x \in R \;\; y \;\; x \geq a\}$$

$$]a, \infty[= \{x \,/\, x \in R \;\; y \;\; x > a\}$$

$$]-\infty, b] = \{x \,/\, x \in R \;\; y \;\; x \leq b\}$$

$$]-\infty, b\,[= \{x \,/\, x \in R \;\; y \;\; x < b\}$$

$$]-\infty,\infty[=\{x \,/\, x \in R\}$$

3.5. Relación y sus Representaciones

Dados dos conjuntos A y B, llamaremos **relación de A en B** a cualquier subconjunto R de AxB. Si el par ordenado (a,b) está en R, diremos que **a está R-relacionado con b** y lo denotaremos aRb. En caso contrario pondremos $a \not R b$

Ejemplo de relaciones.

---

1) A = B = N; $R=\{(x,y)/\, x\in N, y\in N, x \text{ divide a } y\}$; esto es aRb sí y solo si a divide a b. Entonces 2R6, 5R40, $7 \not R 2$.
2) A = B = R, aRb si y sólo si a=b. Esta relación suele llamarse la diagonal.
3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x,y,z\}$, $R=\{(1,x),(3,x),(3,y)\}$. Si R es una relación de A en B, llamamos a A **conjunto de partida** y a B **conjunto de llegada** de R. Se llama **dominio** de la relación R al conjunto.

$$D_R=\{a/\text{para algun } b\in B, \text{se cumple que } (a,b)\in R\}$$

esto es, D_R es el conjunto de primeras componentes de los pares ordenados en R. Entonces,

$$D_R \subset A$$

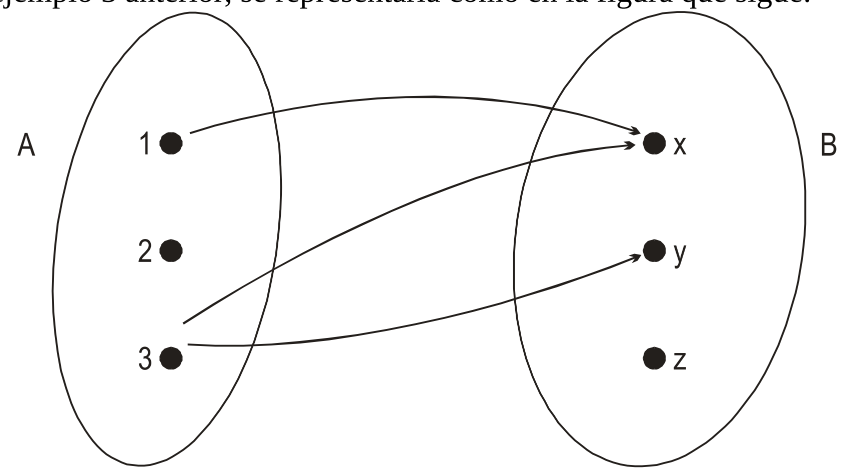
Si aRb, decimos que **b es imagen de a por R** (por supuesto que entonces $a\in D_R$).
Se llama **conjunto imagen de R** o simplemente imagen de R al conjunto:

$$I_R=\{b/\text{para algun } a\in A, (a,b)\in R\}$$

es decir, imagen de R es el conjunto formado con las segundas componentes de los pares ordenados en R. Luego, si aRb, $b\in I_R$ y $a\in D_R$.
Entonces

$$I_R \subset B$$

En el caso en que los conjuntos A y B tienen pocos elementos, es útil visualizar las relaciones por una representación utilizando flechas, que por este motivo se llama **sagital**.
En el caso del ejemplo 3 anterior, se representaría como en la figura que sigue:



Es decir, las flechas empiezan en las primeras componentes de la relación y terminan en las segundas componentes respectivas.

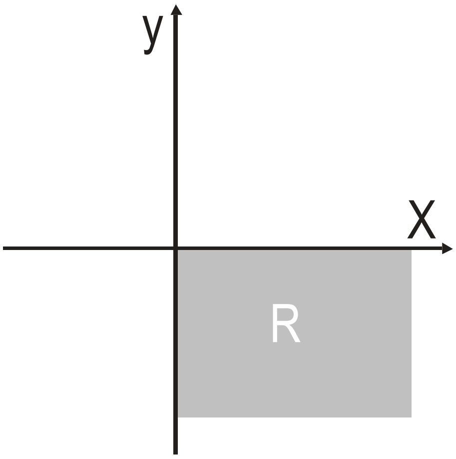
Otra representación de la misma relación, es la **representación matricial**, que ejemplificamos a continuación (siempre en el caso del ejemplo 3 anterior).

	x	y	z
1	si	no	no
2	no	no	no
3	si	si	no

Cuando se trata de relaciones de los números reales en los números reales, es útil la representación cartesiana de la relación.
Por ejemplo, si A=B=R y R está definida por:

$$aRb \text{ si y solo si } a \geq 0 \text{ y } b \leq 0$$

su representación cartesiana sería



Es de notar que en una relación, un punto del dominio puede tener varias imágenes así como un punto del conjunto imagen puede ser imagen de más de un punto del dominio. Este es el caso, por ejemplo, de la relación arriba graficada.
A toda relación R de A en B, le está asociada una relación de B en A, llamada **relación inversa** y denotada R^{-1} y definida por:

$$aR^{-1}b \text{ si y solo si } bRa$$

Está claro entonces que el dominio de R^{-1} es la imagen de R y la imagen de R^{-1} es el dominio de R. En la notación antes introducida escribimos esto en la forma:

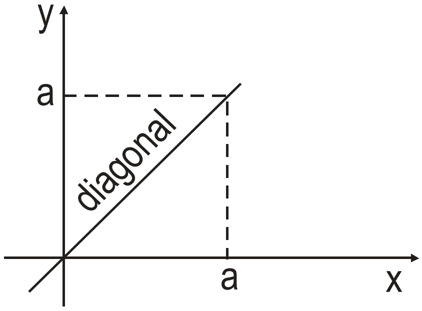
$$D_{R^{-1}} = I_R,\ I_{R^{-1}} = D_R$$

Es de destacar el hecho (evidente por las definiciones) de que

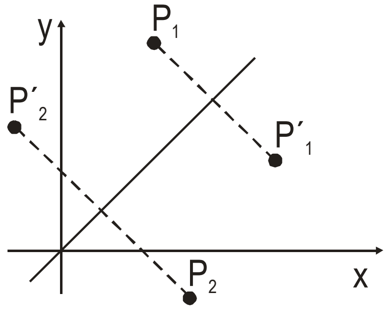
$$\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$$

o sea, la relación inversa de la relación inversa de una relación, es la misma relación.
También destaquemos el hecho de que, en el caso de relaciones de R en R, el gráfico cartesiano de la relación inversa se obtiene del de la relación original, “reflejando” éste respecto de la diagonal de R x R.
Por definición, la “diagonal” o “ bisectriz del primer y tercer cuadrante” es el conjunto

$$\left\{(x,y) / x \in R, y \in R, x = y\right\}$$



Para “reflejar” un punto P en la diagonal, se procede como indica la siguiente figura. La palabra reflejar se utiliza porque en el proceso puede imaginarse a la diagonal como un espejo, siendo P´ la imagen de P en ese espejo.



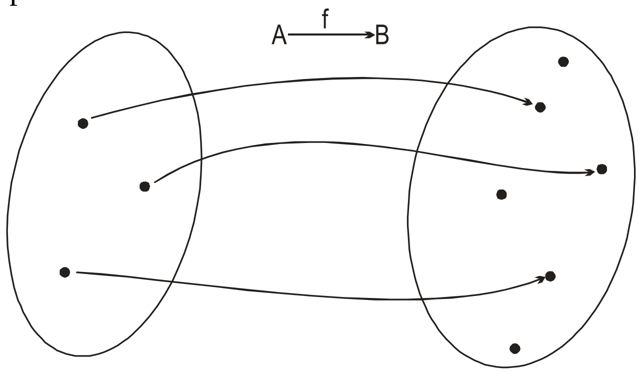
Un punto y su imagen quedan a igual distancia de la diagonal, sobre la misma perpendicular.

3.6. Funciones

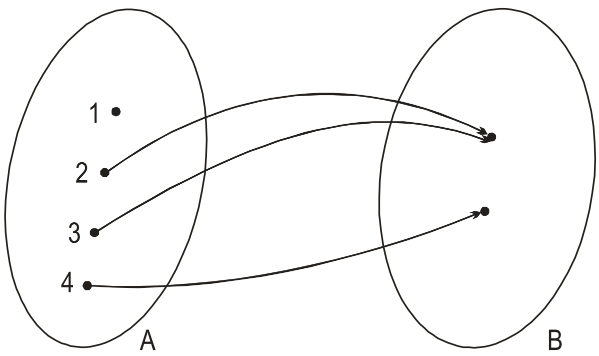
Sean A y B conjuntos arbitrarios. Una regla que asigna a cada elemento de A un único y bien determinado elemento de B define como una **función de A en B**; también decimos una **aplicación de A en B** o una **transformación de A en B.** El conjunto A se llama el **dominio** o conjunto de partida y el conjunto B, conjunto de llegada.
Para indicar que “f” es una función de A en B usaremos indistintamente las notaciones:

$$\mathrm{f}: A \rightarrow B; \ A \xrightarrow{\mathrm{f}} B$$

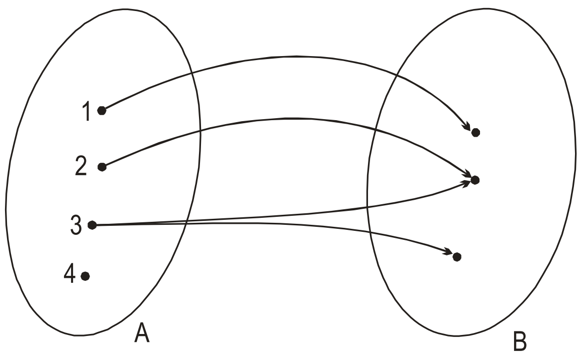
El siguiente diagrama representa una función:



Los diagramas siguientes **no** representan funciones:



El elemento de “1” del conjunto A **no** está asignado a ningún elemento de B.



El elemento “3” del conjunto A está asignado a **dos** elementos de B.

Al elemento del conjunto de llegada que la función “f” asigna al elemento “a” del conjunto de partida se lo llama la **imagen de “a” por “f”** y se lo simboliza por “f(a)”. También se utiliza la notación $a \rightarrow b$ para indicar b = f(a).

Ejemplos

1. Si "a" es un número, el número "a^2+1" está bien determinado. La asignación

$$a \to a^2+1$$

permite definir una función entre ciertos pares de conjuntos, como las siguientes:

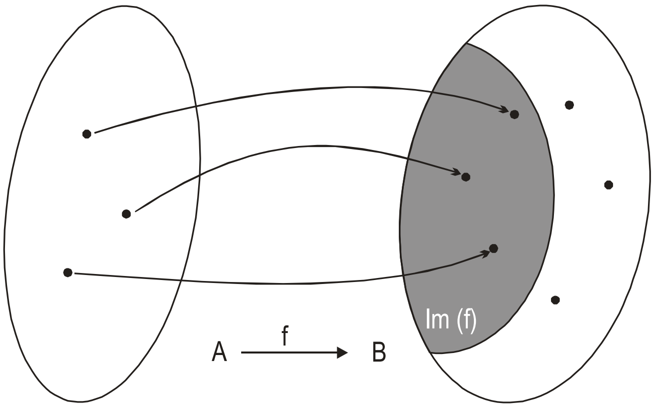
$$f: N \to N$$

$$g: Q \to Q$$

$$h: \{0, 1, 2, 3\} \to Z$$

$$j: Z \to N$$

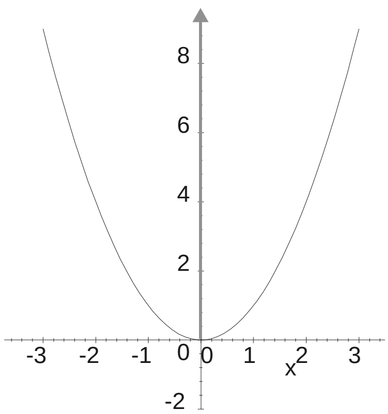
La misma asignación **no define** una función de $\left\{0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ en N, ¿Por qué?



La imagen de "f" es el subconjunto de B formado por los puntos a los cuales llega al menos una flecha.

Ejemplos

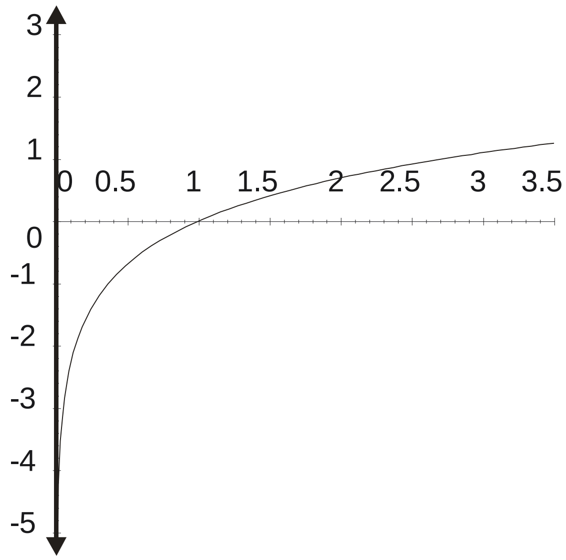
1) $f: R \to R;\ f(x) = x^2$
$Im(f) = R_{\geq 0}$



2) $g: R_{\geq 0} \to R;\ g(x) = ln(x)$

$Im(g) = R$

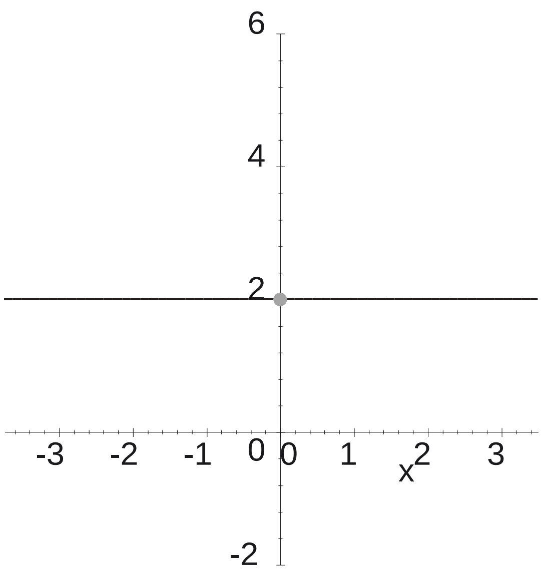
(ln representa el logaritmo natural)



3) $h: R \rightarrow R;\ h(x) = c$

$Im(h) = \{c\}$

(esta función recibe el nombre de función Constante)



En nuestro curso estamos interesados en él estudio de un tipo particular de funciones: aquellas cuyo dominio es una parte A de R y cuyo conjunto de llegada es R (o un subconjunto de R). En lo que sigue, y salvo expresa mención en contrario, cuando hablemos de funciones entenderemos que son de este tipo. Frecuentemente utilizaremos la notación:

$$y = \mathrm{f}(x)$$

como una forma abreviada de indicar la función:

$$f: A \subseteq R \rightarrow R;\ y = f(x)$$

La asignación x a $2x$ define una función de R en R que indicamos:

$$f: R \ \rightarrow \ R; \ y = f(x) = 2x$$

En este ejemplo, la imagen del número 3 es el número 6.
Escribimos: f(3) = 6.

La asignación x a $\sqrt{x}$ no define una función de R en R.
La misma asignación sí define una función de $R_{\geq 0}$ (conjunto de números reales no negativos) en R.

La asignación:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \sqrt{x}\text{-}5 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 5 \\ 8 & \text{si} \quad 5 < x \end{cases}$$

define (por tramos) una función de R en R.
Para **definir** una función deben darse:

a. el dominio.
b. el conjunto de llegada.
c. la regla o asignación que hace corresponder a cada elemento del dominio un elemento del conjunto de llegada.

En consecuencia, dos funciones "f" y "g" son **iguales** si y sólo si tiene el **mismo dominio**, el mismo **conjunto de llegada** y además: **f(x) = g(x) para todo "x" en el dominio.**
Las funciones

$$f: R \ \rightarrow \ R; \quad y = f(x) = \frac{2\,x^3 + 2x}{x^2 + 1}$$

$$g: R \ \rightarrow \ R; \quad y = g(x) = 2x$$

son iguales.

Las funciones

$$F: R \ \rightarrow \ R; \quad y = F(x) = x^2$$

$$G: R \ \rightarrow \ R_{\geq 0}; \quad y = G(x) = x^2$$

no son iguales.

3.6.1. Imagen de una función.

Sea $f: A \rightarrow B$ una función. El conjunto de elementos de B que son imagen de algún elemento de A se llama la **Imagen (o el Rango) de la función** y se denota con el símbolo **Im(f)** (o también f(A)).

$$\text{Im(f)} = \text{f(A)} = \{ b \in B / \text{existe algún } a \in A \text{ que } verifica: f(a) = b \}$$

La notación: y = f(x), si bien puede dar lugar a alguna confusión (al identificar la función "f" con la regla que asigna a cada elemento de A un elemento de B) la utilizaremos frecuentemente por ser cómoda. Cuando la utilicemos, convendremos en que el dominio es el **mayor subconjunto de** R para el cual **la expresión tiene sentido** y en que el conjunto de llegada es R. En todo los demás casos se deberá especificar cuál es el dominio y cuál la imagen o conjunto de llegada.
Así, utilizaremos la notación y = x^2 para indicar la función:

$$F: R \ \rightarrow \ R; \quad y = F(x) = x^2$$

pero **no** para indicar la función:

$$G: R \to R_{\geq 0}; y = G(x) = x^2$$

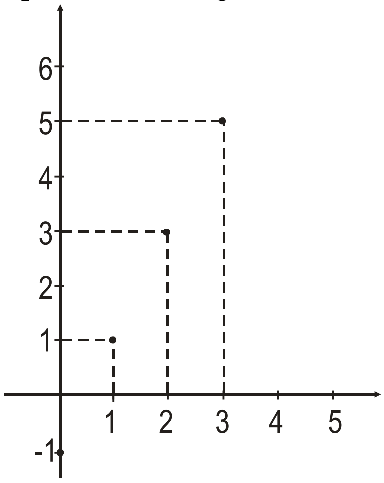
En el estudio de las funciones de R en R resulta útil poder "visualizarlas". Para ello utilizaremos la **gráfica** de la función.
Se llama **grafo** de una función "f" al conjunto de pares (a; f(a)).Estableciendo de antemano los conjuntos de partida y de llegada, toda la información referente a la función está contenida en el grafo, que especifica cuáles son los elementos que están en correspondencia. Por ejemplo, sea la función:

$$f: \{0, 1, 2, 3\} \to R; \quad y = f(x) = 2x - 1$$

El grafo de "f" es

$$G = \{(0,-1)(1,1)(2,3)(3,5)\}$$

Todo par ordenado de números reales puede ser representado por un punto del plano, con referencia a un sistema de coordenadas. Por lo tanto, el grafo de una función admite una representación gráfica, que llamamos **la gráfica de la función**.
Si "f" es la función dada en el ejemplo anterior su gráfica es:



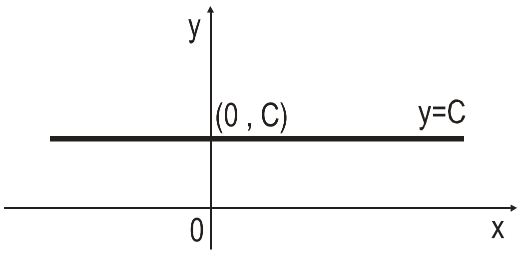
3.7. Funciones de primer grado y de segundo grado

3.7.1. Funciones Constantes

Sea "c" un número real arbitrario. La función de los reales en los reales definida por la asignación:

f (x) = c

(ó, abreviadamente, la función y = c) se denomina "función constante".
La representación gráfica de una función de este tipo es una recta paralela al eje de las "x", la que pasa por el punto (0, c).



3.7.2. Funciones de primer grado

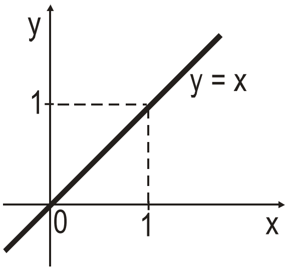
Sean “a” y “b” números reales arbitrarios, $a \neq 0$. La función de los reales en los reales definida por la asignación.

$$f(x)= a\,x+ b$$

(ó, abreviadamente, la función y=ax + b) se llama “función de primer grado”.

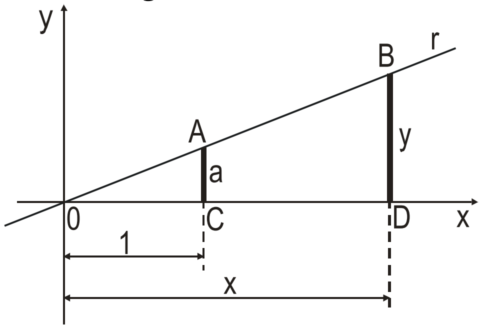
Observación

Las funciones de este tipo suelen llamarse “funciones lineales”. Nosotros reservaremos este nombre para la funciones de la forma y=ax, es decir para las funciones de primer grado con b=0.
Un ejemplo de función de primer grado es la función y = x. Su representación gráfica es una recta: la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



Estudiemos ahora un caso un poco más general: las funciones de la forma y = ax.
La representación gráfica de esta función es la recta “r” determinada por el origen 0 = (0, 0) y por el punto A = (1, a) como en la figura que sigue.
Para demostrar esto tendremos que probar:

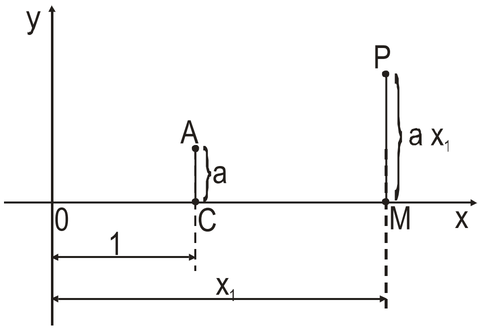
I) Todo punto de la recta pertenece al gráfico de la función.
II) Todo punto que pertenece al gráfico de la función está en la recta.



I) Sea $B = (x, y) \neq (0,0)$ un punto cualquiera de la recta. De la figura resulta que: los triángulos 0AC y 0BD son semejantes, por tener sus ángulos iguales. Por consiguiente los lados homólogos son proporcionales;

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{0D}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{0C}} \quad \text{luego} \quad \frac{y}{x} = \frac{a}{1} \quad y=ax$$

II) Sea $P = \left(x_1, ax_1\right)$ un punto del gráfico de y = ax y A el punto (1, a).



De la figura resulta:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{0C}}} = \frac{a}{1}\ ;\ \frac{\overline{PM}}{\overline{\overline{0M}}} = \frac{ax_1}{x_1} = \frac{a}{1}$$

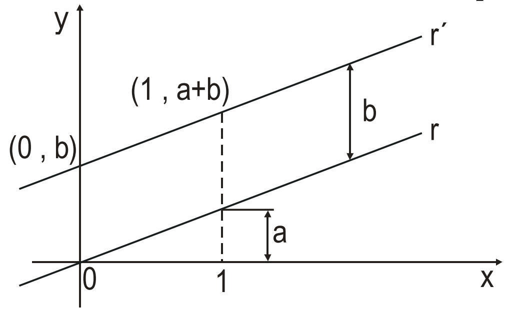
Los triángulos 0CA y 0MP son semejantes, por consiguiente los ángulos homólogos son iguales. Como los ángulos iguales A0C Y P0M tienen un lado común, también el otro lado debe ser común. Por consiguiente, el punto P está en la recta determinada por 0 y A.

Estudiemos ahora el caso general:

$$y = ax + b$$

Observemos que para cada “x” el valor de “y” se obtiene sumándole “b” al valor de “y” definido por la función y = ax.

Por consiguiente, para obtener la representación gráfica de y = ax + b, basta con “trasladar” el gráfico de y = ax, “b” unidades en la dirección del eje “y”. Podemos afirmar entonces que la representación gráfica de dicha función es la recta r´ determinada por los puntos (0, b) y (1; a+b).



Hemos probado entonces que

> La representación gráfica de toda función y = ax + b, es una recta.

Resulta natural preguntarse si es cierta la afirmación recíproca, esto es, si toda recta del plano es la representación gráfica de una determinada función de primer grado.

La respuesta es no. En efecto, consideremos el eje “y” es decir

$$\{(0,a)/a \in R\}$$

No existe ninguna función, de primer grado (ó no), cuya representación gráfica sea dicho eje. ¿Por qué?

Lo mismo si consideramos cualquier recta paralela al eje “y”.

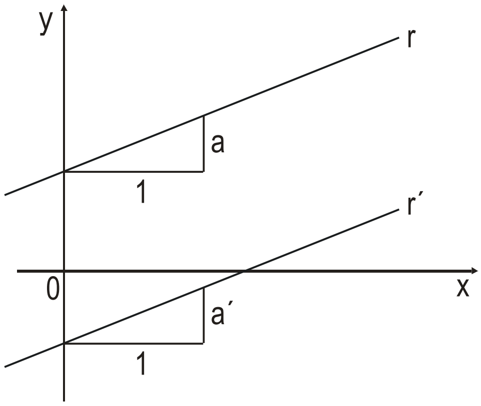
Sin embargo, **toda recta no paralela al eje “y” es la representación gráfica de una función de primer grado.**

No demostraremos esta afirmación y dejaremos para más adelante la resolución del problema de, dada una recta no paralela al eje “y”, encontrar la función y = ax + b, cuya representación gráfica sea dicha recta.

Observaciones

Sea y = ax + b

1) Para poder dibujar la recta representativa basta con conocer los valores de “y” correspondientes a 2 valores distintos de “x”.
2) El punto (0, b) es el punto de intersección de la recta con el eje “y”, por esta razón al número “b” se lo suele llamar la **ordenada al origen**.
3) Los puntos (0, b) y (1, a +b) son puntos de la recta. Vemos que a una variación de una unidad en la dirección del eje “x” correspondiente una variación de “a” unidades en la dirección del eje “y”. De allí el nombre de **pendiente** que se da al número “a”.
4)



Mirando la figura de arriba podemos convencernos que las rectas

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b'$$

son paralelas si y sólo si

$$a = a'$$

3.7.3. Funciones de segundo grado.

Las funciones de los reales en los reales de la forma

$$f(x)= ax^2+bx+c$$

(ó, abreviadamente, la funciones $y = ax^2 + bx + c$) donde "a", "b" y "c" son números reales y $a \neq 0$ se denomina **funciones de segundo grado**.

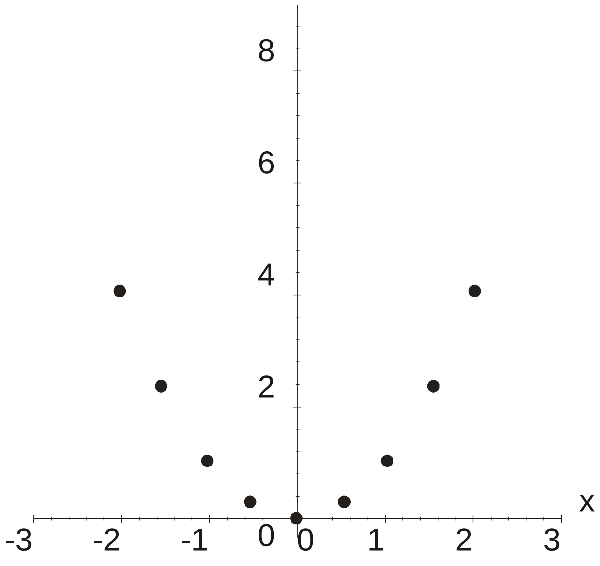
Nuestro objetivo es tener idea de cómo es la representación gráfica de una función de este tipo. Comencemos estudiando el caso más sencillo, la función $y = x^2$, definido para todo "x" real.

En 1° lugar observemos: I) no habrá puntos del gráfico por debajo del eje de las "x" pues "y" no puede ser negativo. II) El origen de coordenadas es un punto del gráfico. III) Si un par (a, b) pertenece al gráfico de la función, $(b = a^2)$ el par (-a, b) también pertenece y por consiguiente la representación gráfica será simétrica respecto al eje "y".

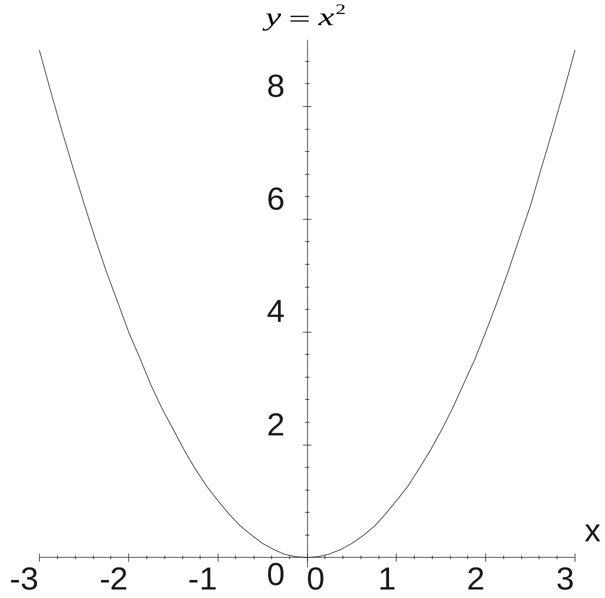
Calculemos algunos pares del gráfico de la función (ya que no podemos calcularlos a todos :)

X	0	1/2	1	3/2	2
$y = x^2$	0	1/4	1	9/4	4

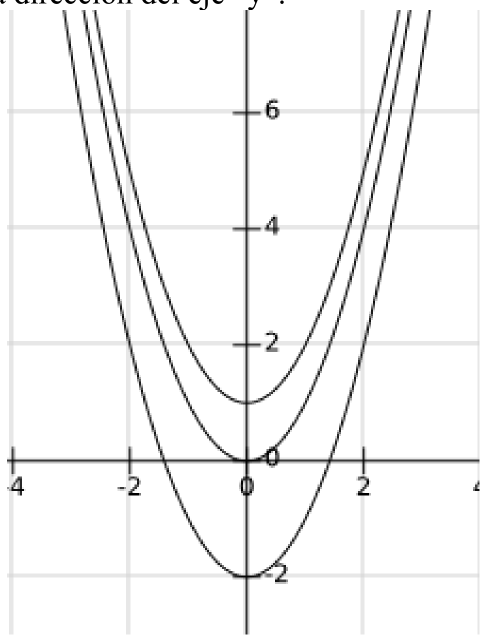
Representamos los puntos obtenidos en el plano cartesiano, dibujando también los simétricos.



Para poder hacer la representación gráfica utilizamos el hecho de que la función es "continua" y "suave". (En cursos superiores de matemáticas se verá que esta función es realmente continua y suave, previa definición de estos términos) Entonces unimos los puntos marcados con una curva de estas características y obtenemos la representación gráfica de la función:



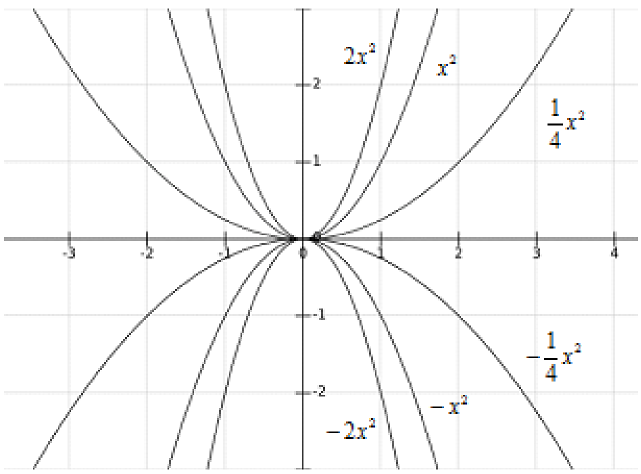
La curva obtenida es lo que se llama una parábola a eje vertical, cuyo vértice es el origen. Si queremos ahora hacer la representación gráfica de la función $y = x^2 + 1$ bastará con "trasladar" el gráfico de $y = x^2$ una unidad hacia arriba en la dirección del eje "y".
Similarmente la representación gráfica de $y = x^2 - 2$ se obtiene "trasladando" la de $y = x^2$ "2 unidades hacia abajo" en la dirección del eje "y".



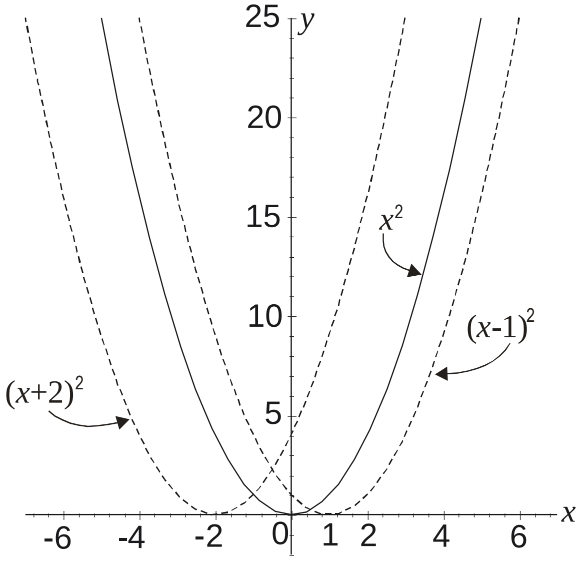
Tenemos una buena idea de cómo es la representación gráfica de funciones de la forma $y = x^2 + a$: son parábolas cuyo eje coincide con el eje "y", y cuyo vértice es el punto (0, a).
La figura siguiente muestra la representación gráfica de las funciones:

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = 2x^2$$
$$h(x) = \frac{1}{4}x^2$$
$$j(x) = -x^2$$
$$k(x) = -2x^2$$
$$l(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

Cada punto del gráfico de “g” se obtiene del de “f” como sigue: si (a, b) pertenece al gráfico de f $(b = a^2)$ el punto (a, 2b) pertenece al gráfico de “g”. Por consiguiente basta con multiplicar por 2 las ordenadas de los puntos de “f”.
Similarmente, multiplicando por 1/4 cada distancia al eje “x” se obtiene los puntos del gráfico de $h(x) = \frac{1}{4}x^2$.
Tenemos pues una buena idea de cómo va ser la representación gráfica de las funciones de la forma $y = ax^2$.
Siempre resulta una parábola cuyo eje coincide con el eje “y”, cuyo vértice es el origen. Si “a” es un número positivo las ramas “apuntan” hacia arriba y a valores mayores de “a” corresponden a parábolas más “estrechas”.
Para valores de “a” negativos la parábola se invierte, es decir, las ramas “apuntan” hacia abajo.
La figura siguiente muestra los gráficos de las funciones definidas por:



$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = (x-1)^2 \qquad h(x) = (x+2)^2$$



El gráfico de “g” se obtiene del de “f” de la siguiente manera:

si (a, b) es un punto perteneciente al gráfico de “f” $\left(b=a^2\right)$ el punto (a + 1, b) pertenece al gráfico de “g”.

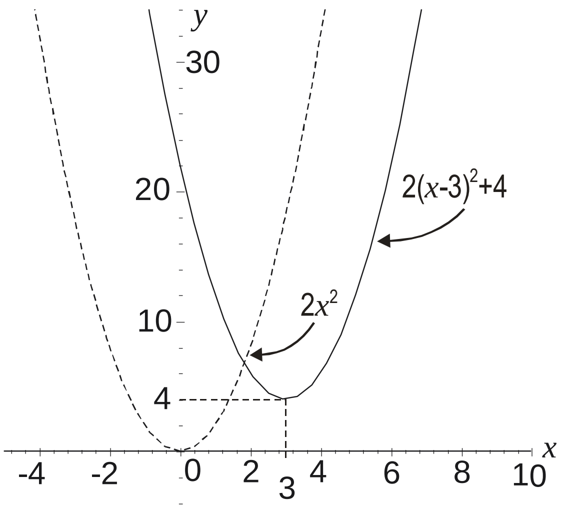
Para verificar esto debemos mostrar que el cuadrado de la primera coordenada menos uno es la segunda. En símbolos

$$\left((a+1)-1\right)^2=a^2=b$$

Geométricamente, significa que la representación gráfica de “g” se obtiene trasladando una unidad horizontalmente hacia la derecha la representación gráfica de “f”.
Similarmente, la representación gráfica de “h” se obtiene trasladando 2 unidades horizontalmente hacia la izquierda la parábola $y=x^2$.
Tenemos una idea razonable de cómo es la representación gráfica de las funciones de la forma $y=(x-a)^2$.
Queremos ahora hacer la representación gráfica de la función

$$y=2\left(x-3\right)^2+4$$

La obtenemos trasladando el gráfico de $y=2x^2$, 3 unidades horizontalmente hacia la derecha y luego la derecha y luego 4 unidades verticalmente hacia arriba.



En general la representación gráfica de la función:

$$y=a\left(x-s\right)^2+t \qquad [1]$$

se obtiene trasladando la parábola $y=ax^2$, “s” unidades horizontalmente (hacia la derecha si “s” es positivo y hacia la izquierda si “s” es negativo), y “t” unidades verticalmente (hacia arriba si “t” es negativo y hacia abajo si “t” es negativo). Es decir, se obtiene una parábola cuyo eje es la recta x = s y cuyo vértice es el punto (s, t).
Veamos que toda función cuadrática puede ser escrita en esta forma, utilizando para ello el método de “completar cuadrados”.
Recordamos que

$$\left(x-s\right)^2=x^2-2xs+s^2$$

Queremos expresar: $y=x^2-4x+5$ en la forma (1).
Observemos que x^2-4x puede pensarse como los 2 primeros sumados del desarrollo de $(x-s)^2$ con $s=2$. Luego:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 5 \\ &= \left(x^2 - 4x + 4\right) + 5 - 4 \\ &= \left(x - 2\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

Consideramos ahora la función definida por $y = x^2 + 3x - 10$. Razonando como en el ejemplo anterior debemos tomar

$$s = \frac{-3}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 3x - 10 \\ &= \left(x^2 + 3x + 9/4\right) - 10 - 9/4 \\ &= \left(x + 3/2\right)^2 - 49/4 \end{aligned}$$

Queremos expresar en la forma (1) la función definida por

$$y = -3x^2 - 6x - 1$$

luego

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x + 1/3 \\ &= \left(x^2 + 2x + 1\right) + 1/3 - 1 \\ &= \left(x + 1\right)^2 - 2/3 \end{aligned}$$

de donde

$$y = -3(x+1)^2 + 2$$

Veamos ahora que toda función cuadrática $\mathrm{f}(x) = ax^2 + bx + c$, puede expresarse en esa forma.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{f}(x)}{a} &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\ &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Consejo: No intentar memorizar esta expresión y en cada caso completar cuadrados, tal como lo hicimos en los ejemplos anteriores.

En resumen, hemos mostrado que la representación gráfica de toda función

$$y = ax^2 + bx + c$$

es una parábola a eje vertical.

Ejemplo 1

Trazar la parábola definida por la función

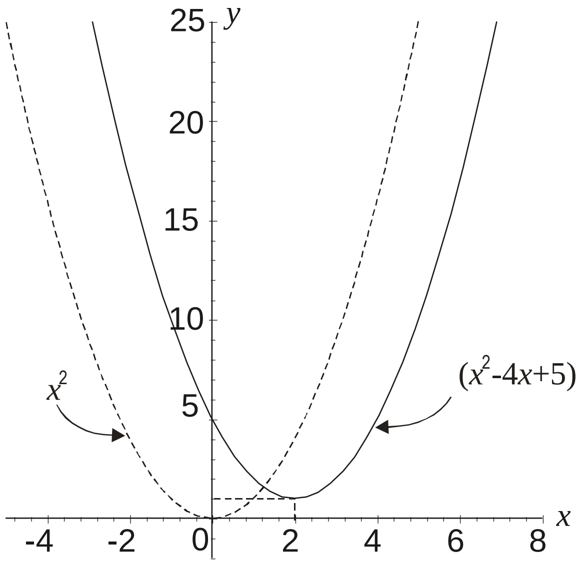
$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = x^2 - 4x + 5$$

Recién vimos que esta función puede ponerse como

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \left(x - 2\right)^2 + 1$$

El valor de ”f” se calcula sumándole a un cuadrado el número 1. El menor valor de “f” ocurrirá para $x - 2 = 0$ esto es, para $x = 2$.

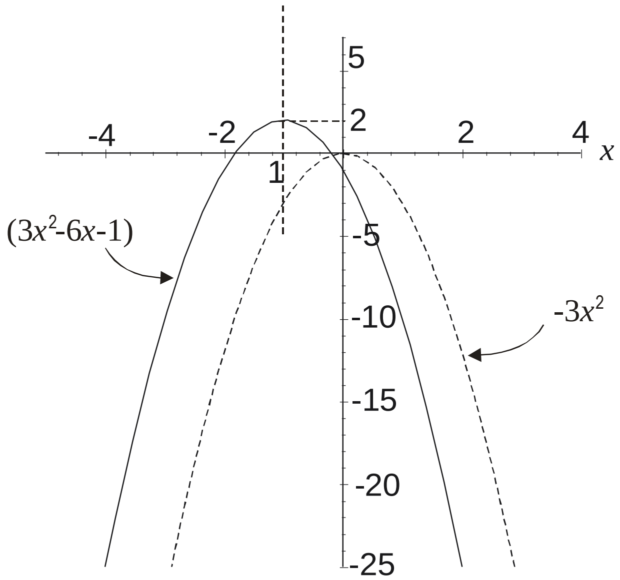
Como $f(2)=1$ el punto (2, 1) es el punto "más bajo" de la curva (vértice). Obtenemos la parábola pedida trasladando la parábola $y=x^2$, 2 unidades horizontalmente hacia la derecha y 1 unidad verticalmente hacia arriba. Luego $x=2$ es el eje de la parábola.



Ejemplo 2

Dar la representación gráfica de la función definida por:

$$f(x)=-3x^2-6x-1=-3\left(x+1\right)^2+2$$



Obtenemos la representación gráfica trasladando la parábola $y=-3x^2$ una unidad horizontalmente a la izquierda y dos unidades verticalmente hacia arriba.
Es evidente que el mayor valor para "f" ocurre cuando $x+1=0$, es decir para $x=-1$. Luego $f(-1)=2$ es el máximo valor de la función. La recta $x=-1$ es el eje de la parábola y el punto (-1, 2) su vértice.

3.4. Ejercicios

1. Escribir las afirmaciones siguientes en notación conjuntista:
   a) "x" no pertenece a A.

b) R incluye a S.
c) “d” es un elemento de E.
d) B no incluye a A.

2. Si $A=\{x/2x=10\}$ y $b=5$, ¿es $b=A$?

3. Sea $N=\{\mathrm{r, s, t}\}$. Dígase cuáles de las afirmaciones son correctas y cuáles incorrectas. En tal caso, decir por qué.
   a) $r \in N$
   b) $r \subset N$
   c) $\{r\} \in N$
   d) $\{r\} \subset N$

4. Describir los siguientes conjuntos por comprensión:
   a) A es el conjunto de las letras a, b, c y d.
   b) B=$\{1, 3, 5, 7, ...\}$.
   c) C$=\{5\}$.

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales: $\{\mathrm{a, b, c}\}$, $\{\mathrm{b, a, c}\}$, $\{\mathrm{c, b, a}\}$, $\{\mathrm{a, c, b}\}$?

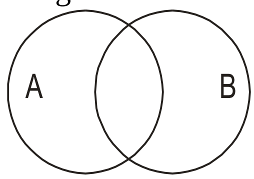
6. Entre los conjuntos que siguen, ¿cuáles son diferentes? $\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$.

7. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos?
   a) $A=\{x/x \text{ es una letra anterior a "a" en el alfabeto}\}$
   b) $B=\{x \in R/x^2=4 \text{ y } 2x=6\}$
   c) $C=\{x \in R/x \neq x\}$
   d) $D=\{x \in R/x+4=4\}$

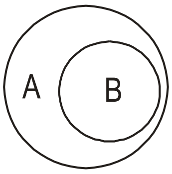
8. Dado $A=\{\mathrm{a, b, c}\}$, ¿cuántos subconjuntos hay en A y cuáles son?

9. Sean A=$\{\mathrm{d}\}$, B=$\{\mathrm{c, d}\}$, C=$\{\mathrm{a, b, c}\}$, D=$\{\mathrm{a, b}\}$ y E=$\{\mathrm{a, b, d}\}$. Establecer la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones
   a) $B \subset C$
   b) $B \neq E$
   c) $B \not\subset A$
   d) $E \subset B$
   e) $A \not\subset D$
   f) $E \not\supset C$
   g) $A \subset C$
   h) $D \not\subset E$
   i) $C = B$
   j) $B \subset D$

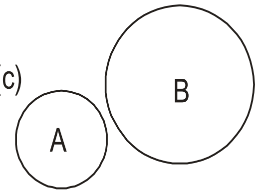
10. En los diagramas de Venn que siguen rayar $A \cup B$

(a) 

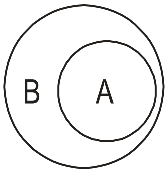
(b)



(c)



(d)



11. Sea A=$\{1, 2, 3, 4\}$, B=$\{2, 4, 6, 8\}$ y C=$\{3, 4, 5, 6\}$. Hallar

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

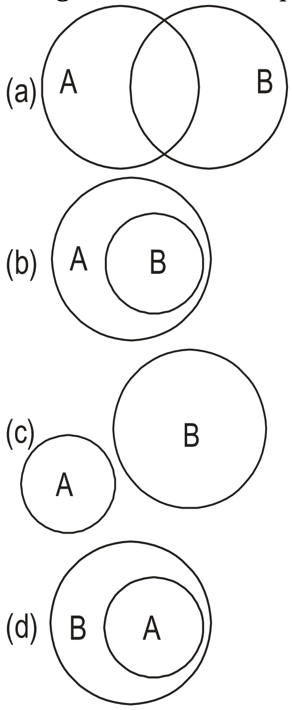
c) $B \cup C$

d) $B \cup B$

e) $(A \cup B) \cup C$

f) $A \cup (B \cup C)$

12. En los diagramas de Venn que siguen, rayar A ∩ B.



13. Sean $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$, y $C=\{3, 4, 5, 6\}$. Hallar

a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) $B \cap C$
d) $B \cap B$
e) $(A \cap B) \cap C$
f) $A \cap (B \cap C)$

14. Sean

$A=\{x \in Z \,/\, x \text{ es par}\}$

$B=\{x \in Z \,/\, x = 6\text{n con "n" natural}\}$

$C=\{x \in Z \,/\, x \text{ es multiplo de } 3\}$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $B \subset A$
b) $C \subset A$
c) $B \subset C$
d) $A = B$

Encuentre

a) B ∩ A
b) C ∩ A
c) C ∩ B

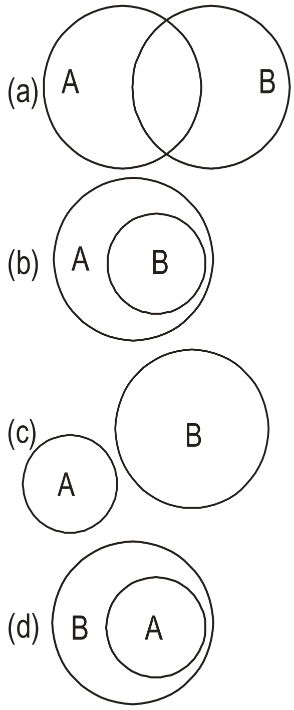
15. Sean

$$A=\{1, 2, 3, 4\},\ B=\{2, 4, 6, 8\} \text{ y } C=\{3, 4, 5, 6\}$$

Hallar

a) $(A - B)$ b) $(C - A)$ c) $(B - C)$ d) $(B - A)$ e) $(B - B)$

16. En los diagramas de Venn que siguen, rayar (A-B)



17. Sean $A=\{x\in R/x^2-3x+2=0\}$ y $B=\{x\in R/2x-2=0\}$. Dar

$a)\ A\cup B \qquad b)\ A\cap B \qquad c)\ B - A$

Lo mismo para

$$B=\{x\in R/3x=12\}$$

18. Sean

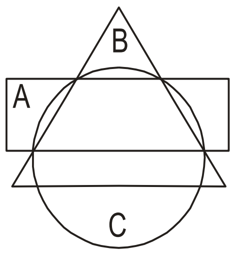
$$U=\{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 8,\ 9\},\ A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}\ y\ C=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Hallar

$a)\ A' \qquad b)\ B' \qquad c)\ (A\cap C)' \qquad d)\ (A\cup B)' \qquad e)\ (A')' \qquad f)\ (B-C)'$

19. Si en el diagrama de la figura, el área interior al rectángulo representa un conjunto A, el triángulo un conjunto B y el círculo un conjunto C, determínese el área representada por

$a)\ A\cup B \qquad b)\ A\cap B \qquad c)\ A\cap C \qquad d)\ B\cup C \qquad e)\ (A\cup B)\cap C' \qquad f)\ (A\cup B)'\cap C$



20. Utilizando los diagramas de Venn demuéstrese que:

$$a)\ A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$b)\ (A\cup B)' = A'\cap B'$$

$$c)\ A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

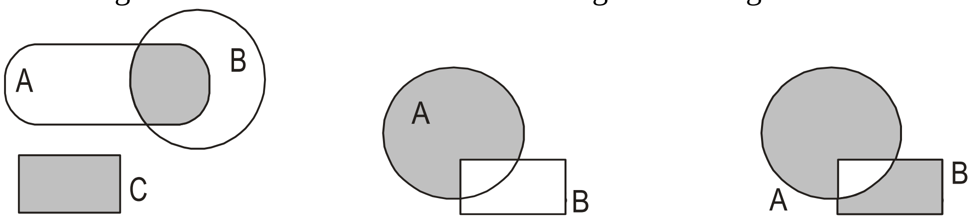
$$d)\ (A\cap B)' = A'\cup B'$$

$e)\ A \cup B = A$ si y sólo si $B \subset A$

$f)\ A \cap B = B$ si y sólo si $B \subset A$

$h)\ B \subset A$ si y sólo si $A' \subset B'$

21. Expresar la región sombreada en cada uno de los siguientes diagramas:



a b c

22. Determinar "a" y "b" para que los pares ordenados (a+3, b-2), (7, 4) sean iguales.
23. Sean los conjuntos $A=\{1, 3, 5\}$ y $B=\{2, 4, 3\}$, dar:

a)A x B b)B x A c)A x A

24. Representar en la recta real los siguientes números: -4; 7/3; 8/3; 2,25.
25. Graficar en la recta real los siguientes subconjuntos:

$a)[1; 5]$ b)$]-2; 4[$ c)$[0; 5] \cup [3; 8]$ d)$[0; 5] \cap [3; 8]$
$e)[3; 9] - [4; 5]$ f)$A = \{x/x \geq 3\}$ g)A'

26. Sean

$$A = [-3; 1[\text{ y } B = [-1; 2]$$

Se pide

a) Representar A y B sobre la misma recta real.
b) Representar AU B, A∩ B y A – B sobre la recta real.
c) Escribir A U B, A ∩ B y A – B en notación de intervalos.

27. Dibujar sobre la recta real y escribir el conjunto que resulta en notación de intervalos:

$$a)\ \{x \in R\ /\ x \geq -1\} \cap \{x \in R / -3 < x < 2\}$$

$$b)\ \{x \in R\ /\ x < 2\} \cup \{x \in R / x \geq 0\}$$

$$c)\ \{x \in R\ /\ -3 < x \leq 1\} \cap \{x \in R / x > 2\}$$

$$d)\ \{x \in R\ /\ -2 < x \leq 3\} \cup \{x \in R / x < 1\}$$

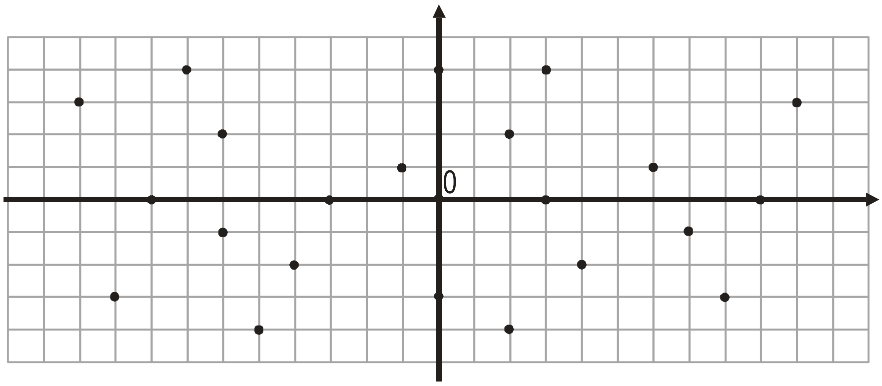
$$e)\ \{x \in R\ /\ -3 \leq x \leq 0\} \cap \{x \in R / -2 < x < 3\}$$

28. Representar en el plano cartesiano los siguientes pares ordenados:

a)(3, 4) b)(0, -2) c)(2, 0) d)(0, 0) e)(-3, 2)

f)(2, -3) g)(0, 5) h)(-2, -5) i)(1, 1) j)(-1, -1)

29. Dar las coordenadas de los puntos marcados en la gráfica siguiente:



30. Sean $A=[2, 6]; B=[3, 4]$. Representar en el plano cartesiano los conjuntos:

a)AxB b)BxA c)AxA d)BxB

31. Sean $A=\{1, 2, 3, 4\}$ y $B=\{0, 3, 5\}$.

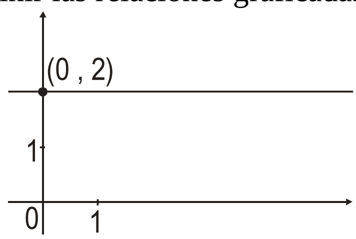
Dar el subconjunto de AxB definido por la relación "x es menor que y".

32. Sean $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B=\{2, 3, 8, 9, 10\}$. dar el subconjunto de AxB definido por:

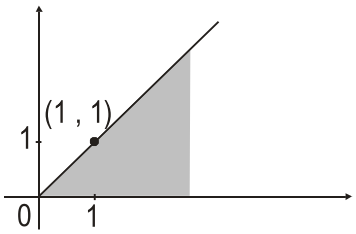
$$\{(x, y) / \text{'}x\text{' divide a '}y\text{'}\}$$

33. Definir las relaciones graficadas en las siguientes figuras:

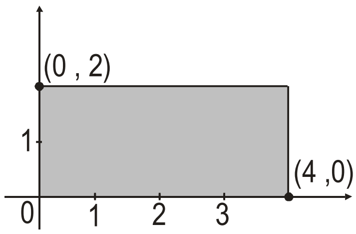
(a)



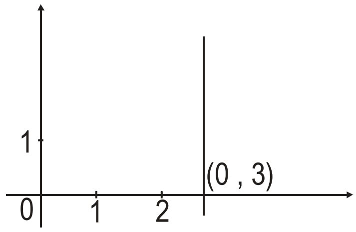
(b)



(c)



(d)



34. En un ecosistema marino, el fitoplancton o bien es comido por el zooplancton, o por los omnívoros, o perece. El zooplancton es comido por los omnívoros, o por los carnívoros, o perece. Finalmente, los omnívoros y los carnívoros se devoran entre sí o perecen. Teniendo en cuenta esta situación, definir una relación en el conjunto producto SxS donde $S=\{\text{fitoplancton, zooplancton, omnívoros, carnívoros, extinción}\}$ y encontrar un gráfico apropiado.

35. Representar gráficamente los subconjuntos de $R^2\left(RxR\right)$ definidos por cada una de las siguientes relaciones:

a) $\left\{\left(x,y\right)/\,x=2\right\}$ b) $\left\{\left(x,y\right)/\,y=0\right\}$

c) $\left\{\left(x,y\right)/\,x^2+y^2=1\right\}$ d) $\left\{\left(x,y\right)/\,0<x<2 \text{ y } y>0\right\}$

36. Dar la relación inversa de cada una de las relaciones definidas en el ejercicio anterior y representarlas gráficamente.

37. Verificar si la asignación $x \to 1/x$ define una función de los siguientes casos:

a) $A=R$ $B=R$

b) $A=R>0$ $B=Q$

c) $A=R-\left\{0\right\}$ $B=Z$

d) $A=R>0$ $B=R$

Si la regla fuera:

$$\begin{cases} x \to 1/x \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \to 2 \end{cases}$$

¿Quedaría definida una función de R en R?

38. Verifique si la asignación: $x \to \left(x^2-4\right)/\left(x-2\right)$ define una función de A en B en los siguientes casos:

$a)A=R$ $\mathrm{B}=R$

$b)A=R-\left\{2\right\}$ $\mathrm{B}=R$

$c)A=Z-\left\{2\right\}$ $\mathrm{B}=Q$

$d)A=\left\{\text{-3, -1, 0, 3}\right\}$ $\mathrm{B}=Z-\left\{2\right\}$

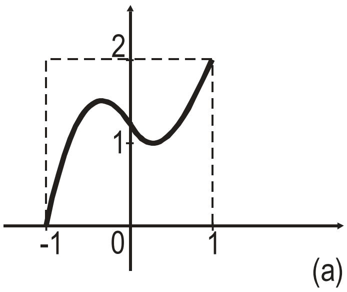
Si la regla fuera:

$$\begin{cases} x \to \left(x^2-4\right)/\left(x-2\right) \\ x \to 8 \text{ para } x=2 \end{cases}$$

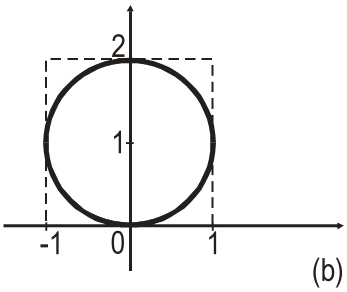
quedaría definida una función de R en R?

Ídem, si la regla es como antes para $x \neq 2$ pero con la asignación $2 \to 4$.

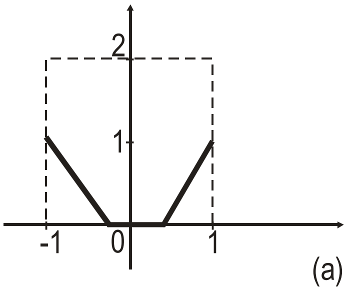
39. Determinar cuáles de los siguientes gráficos representan funciones de $\left[-1;\,1\right]$ en $\left[0;\,2\right]$.



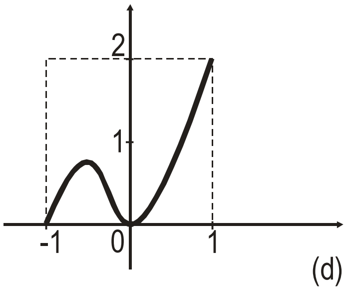
(a)



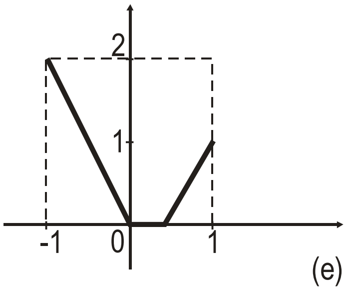
(b)



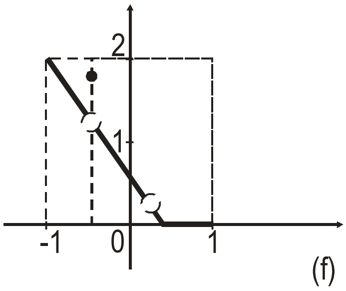
(a)



(d)



(e)



(f)

40. Indicar cuál de los siguientes puntos pertenecen al gráfico de la función $y = 4$

a) (0, 4) b) (0, 0) c) (π, 4) d) (-1, 2) e) (8, 4) f) (4, -4)

41. Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 0$ b) $y = 3$ c) $y = -3$ d) $y = x$ e) $y = -x$

f) $y = x + 2$ g) $y = -2x + 4$ h) $y = 3x + 2$ i) $y = (2/3)x$ j) $y = (2/3)x + 4$

k) $y = (-2/3)x - 3$

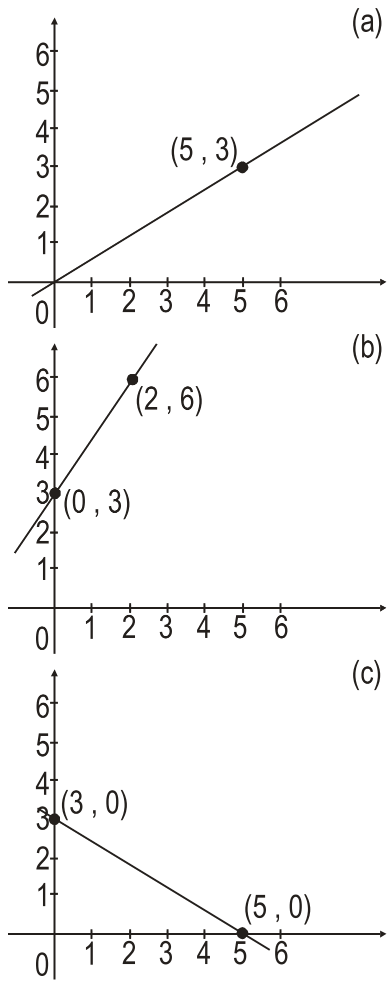
42. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen al gráfico de la función $y = -2x + 5$:

a) (1, 3) b) (0, 5) c) (-1, 8) d) (2, 2) e) (3, -1)

43. Sea la recta definida por la función: $y = -5x + 6$. Determinar:

a) el punto de la misma de abscisa 3.
b) el punto de la misma de ordenada –2.
c) el punto intersección de la recta con el eje x.
d) el punto intersección de la recta con el eje y.

44. Determinar la función $y = ax + b$ que tiene por representación gráfica la recta indicada en cada figura.



45. Calcule la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos dados:
    a) (2; 7) y (4; 9) R: 1
    b) (5; -1) y (2; -2) R: 1/3
46. Halle la ecuación de la recta que pasa a través del par de puntos:
    $a)$ (4; 3) y (2; 5) R: $x+y=7$
    $b)$ (4; 7) y (-2; 3) R: $2x-3y=-13$
47. Determine la ecuación de la recta que:
    a) Pasa a través de (3; 2), con pendiente 3 R: 3x-y=7
    b) Pasa a través de (-2; -3), con pendiente –2/5. R: 2x+5y+19=0
    c) Con pendiente 4,y ordenada en el origen 2. R: y=4x+2
    d) Con pendiente –5, y ordenada en el origen –7. R: y=-5x-7
48. Calcule la pendiente y la ordenada en el origen de la recta determinada por la ecuación:
    a) 2x-y=4 R: 2, -4
    b) x-2y=7 R: ½, -7/2.
49. Demuestre, utilizando pendientes, que los tres puntos dados están situados sobre la misma recta:
    a) (-2; -10), (1; -1), (2; -2).
    R: La pendiente del segmento que une cada par de puntos es 3
    b) (-1; 8), (0; 3), (2; -7)
    R: La pendiente del segmento entre cada par de puntos es –5.
50. Halle la ecuación de la recta que pasa a través de (1; 4) y es paralela a la recta -4x+6y=2 R: 2x-3y+10=0.

51. Halle la ecuación de la recta que tiene la misma ordenada en el origen que la de 2x+5y=-25 y cuya pendiente es el doble de la de 9x-3y=4. R: y=6x-5.

52. Encontrar la función de primer grado cuya representación gráfica es paralela a la correspondiente a la función $y = 2x + 3$, y que contiene al punto (-3, 4). Graficar este problema.

53. Una varilla de cobre que forma parte de un instrumento está expuesta a diferentes temperaturas. Su longitud *l* es casi una función lineal de la temperatura *t* siempre que t<150° (Celsius). Encontrar la ecuación para l utilizando las siguientes medidas.

$$t_1 = 15°,\ l_1 = 76{,}45 \text{ cm}$$

y

$$t_2 = 100°,\ l_2 = 76{,}56 \text{ cm}$$

54. La temperatura en la escala Celsius, denotada por x, y la misma temperatura en la escala Fahrenheit, denotada por la relación lineal 5y-9x=160. Expresar y como función de x y dibujar la función. Prepare una tabla de conversión para x=36,0°; 36,1°; 36,2°;...; 37,0°.

55. Sea Q la cantidad de calor que se requiere para cambiar 1 gramo de agua a 0° centígrado, en agua a t° centígrado. Supongamos que Q es una función lineal de t, temperatura del agua, y también que $0 \le t \le 100$. Si Q=70 a t=15° y Q=140 cuando t=85°, ¿Cuál es la cantidad de calor que se requiere para llevar el agua de 0° a 5°C.

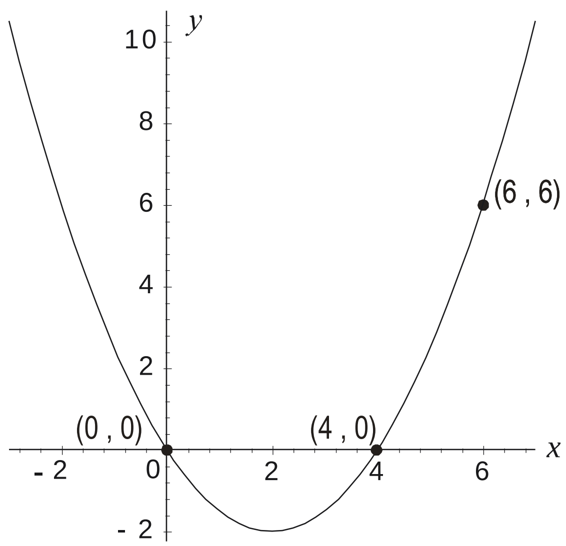
56. Representar las funciones:

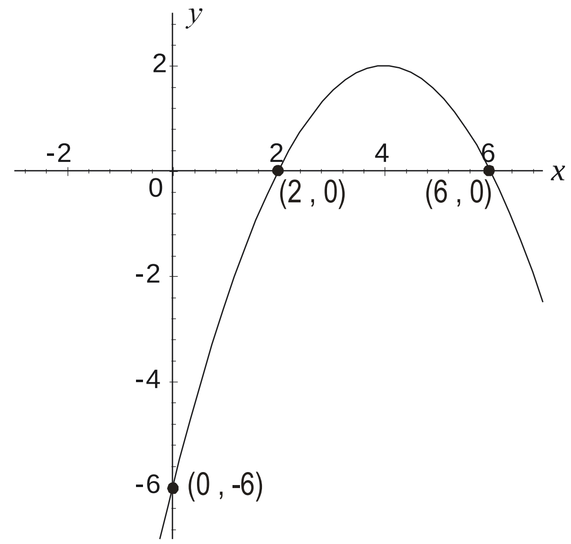
a)$y = x^2$ b)$y = -x^2$ c)$y = x^2 + 2$ d)$y = -x^2 + 2$

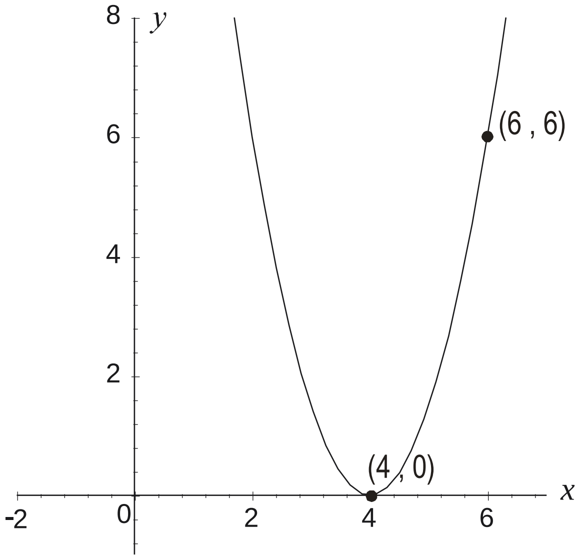
e)$y = 2x^2 + 3$ f)$y = (x-1)^2$ g)$y = 2(x+1).(x-3)$ h)$y = -x^2 + 4$

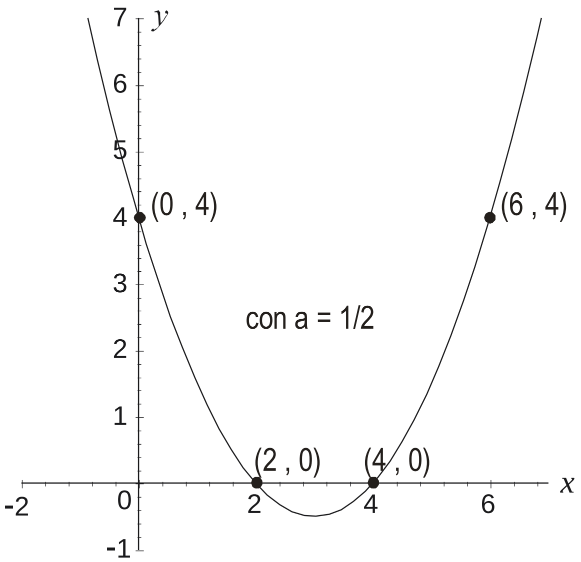
i)$y = x^2 - 4$ j)$y = x^2 - 2x + 1$ k)$y = x^2 - 5x + 6$ l)$y = -x^2 - 3x - 2$

57. Determinar en cada caso la función $y = ax^2 + bx + c$ cuya representación gráfica es:









58. Supóngase que un campo rectangular está al lado de un río, hay que vallarlo por sus otros lados y se dispone de una longitud de valla de 50 m.

a) Encontrar una función cuadrática que exprese el área del terreno A correspondiente al ancho x.

b) Dibujar la gráfica de la función de la parte a).

c) ¿En qué punto alcanza f el máximo? ¿Cuál es la mayor superficie que puede ser vallada?

59. Dibuje la gráfica de la parábola:

a) $y = 2x^2$

b) $y = -3x^2$

c) $y = x^2 / 2$

d) $y = -x^2 / 3$

e) $y = (x+3)^2$

f) $y = -(x+1)^2$

g) $y - 2 = -(x+1)^2$

h) $y - 1 = (x+3)^2$

i) $y - 2 = 2(x-3)^2$

j) $y - 4 = -3(x+1)^2$

60. Escriba la ecuación en forma canónica:

a) $y = 4x^2 - 8x + 6$ R: $y - 2 = 4(x-1)^2$

b) $y = -3x^2 + 18x - 28$ R: $y + 1 = -3(x-3)^2$

61. Halle el eje de simetría y el vértice:

a) $y = 4x^2 - 16x + 17$ R: $x = 2$, (2; 1)

b) $y = -3x^2 + 6x - 4$ R: $x = 1$, (1; -1)

62. Dibuje la gráfica de:

a) $y = 2x^2 - 4x + 6$

b) $y = 3x^2 + 18x + 30$

4

Ecuaciones

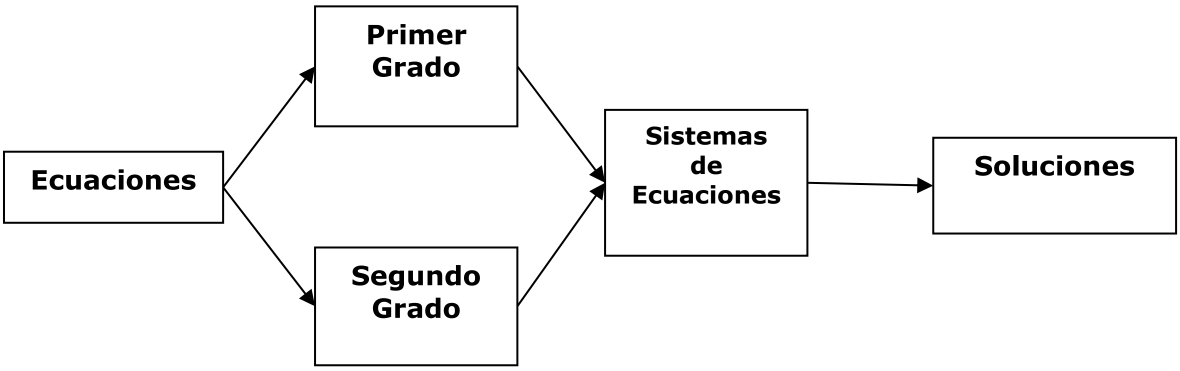
Objetivos
Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- Resolver ecuaciones de primer grado con una o dos incógnitas.
- Resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas de primer y segundo grado.
- Trasladar al lenguaje algebraico relaciones de igualdad expresadas en el lenguaje ordinario.
- Adquirir una metodología adecuada para resolver problemas.

Contenidos:

1. Ecuación de primer grado con una incógnita.
2. Ecuación de primer grado con dos incógnitas.
3. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
4. Ecuación de segundo grado con una incógnita.
5. Reconstrucción de la ecuación de segundo grado con una incógnita, conocidas sus raíces.
6. Sistemas mixtos.

Esquema Conceptual



Introducción.

En esta unidad se consideran distintos tipos de ecuación y la operatoria correspondiente para obtener la solución de cada una de ellas. Agrupamos estas ecuaciones para obtener sistemas de ecuaciones y detallaremos la metodología conveniente para resolverlos. También plantearemos problemas de distinta naturaleza que se expresarán matemáticamente por una o más ecuaciones.
Recuerde: Aprender a calcular con exactitud y operar símbolos con facilidad es un gran objetivo. Pero poder resolver problemas fáciles y difíciles, prácticos y abstractos, es una proeza suprema.

Orientación del aprendizaje

Lea la introducción teórica de cada tema y desarrolle personalmente los ejemplos que le siguen. Realice la ejercitación correspondiente.

Bibliografía de la unidad

Englebert, S., Pedemonti, S., Semino, S., “Matemática 3”. AZ editora.
De Simone, I., Turner, M., “Matemática 4”. AZ editora.
Tapia, N., Bibiloni, A., Tapia, C., “Matemática 3 y 4”. Editorial Estrada.

4.1. Ecuación de 1° grado con una incógnita.

Planteamos el siguiente problema: dada la función:

$$y = ax + b$$

queremos encontrar el punto de intersección de su representación gráfica con el eje “x”.
Por ejemplo si $y = 3x - 6$ nos preguntamos para que valores de “x” es:

$$y = 0$$

o sea: $3x - 6 = 0$.
Es evidente en este caso que la igualdad se verifica únicamente para x=2.
Decimos que 2 es la única solución de la ecuación planteada.
Resolver una ecuación es determinar todas sus soluciones (o raíces), esto es, encontrar todos los valores en el estudio de ecuaciones del tipo:

$$ax + b = 0,\ a \neq 0$$

llamadas **ecuaciones de primer grado** con una incógnita. Resolver una ecuación de este tipo es un problema sencillo, como lo ilustran los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $2x + 7 = 0$.

$$2x + 7 = 0$$
$$2x = -7$$
$$x = -\frac{7}{2}$$

Está última ecuación tiene por única solución el número –7/2 que es también la única solución de la ecuación planteada.

Ejemplo 2

La ecuación (6x+1) (x+3)=(3x+2) (2x-1) no es aparentemente una ecuación de primer grado. Sin embargo, efectuando las operaciones indicadas resulta:

$$6x^2 + 18 + x + 3 = 6x^2 - 3x + 4x - 2$$
$$18x = -5$$
$$x = -\frac{5}{18}$$

Ejemplo 3

Resolver

$$x^2-3x+2=(x-2)\,(x-1)$$

Efectuando

$$x^2-3x+2=x^2-2x-x+2$$

que evidentemente se verifica para todo valor de "x".
Por consiguiente, el conjunto de soluciones de esta ecuación es el conjunto de todos los números reales.

Ejemplo 4

Resolver

$$2\left(\frac{1}{2}x-1\right)=x+7$$

$$x-2=x+7$$

Es evidente que ningún número real verifica esta ecuación. Por consiguiente la ecuación planteada carece de soluciones. Una ecuación que carece de soluciones se dice incompatible.

Ejemplo 5

Resolver:

$$(x+2)\,(3x-1)=(3x+6)\,(x+1)$$

$$3x^2-x+6x-2=3x^2+3x+6x+6$$

$$-4x=8$$

$$x=-2$$

Observación: Como $3x+6=3(x+2)$ la ecuación anterior puede escribirse:

$$(x+2)\,(3x-1)=3(x+2)\,(x+1)$$

En este punto nos sentimos tentados de simplificar el factor (x+2). Si hiciéramos tal cosa obtendríamos la ecuación:

$$3x-1=3(x+1)$$

que evidentemente es incompatible. Explique a qué se debe esta aparente contradicción ;-)
En los ejemplos anteriores se han considerado ecuaciones que son de la forma ax+b=0, $a\neq 0$.
En algunos casos resultó que, mediante operaciones que no alteran el conjunto de soluciones, pueden llevarse a una ecuación del tipo mencionado; es costumbre en estos casos, decir (abusando del lenguaje) que la ecuación original es de primer grado. Los ejemplos 3 y 4 ilustran el caso en que la ecuación original no puede llevarse a la forma deseada.
La ecuación ax+b=0, $a\neq 0$ siempre se puede resolver y admite la solución única $x=\frac{b}{a}$.

4.2. Ecuación de 1° grado con dos incógnitas.

Una ecuación de la forma ax+by = c se llama ecuación de primer grado con 2 incógnitas. Una solución de una ecuación de este tipo es un par ordenado de números que la satisfacen.

Ejemplo 1

Sea la ecuación 2x-y = 7.
El par (4, 1) es una solución pues 2.4-1.1 = 7.
Los pares (0, -7), (1, -5), (1/2; -6), (4/3; -13/3) son también soluciones.

El par (3, 5) no es una solución pues 2.3-5 = 1 $\neq$ 7.
Es inmediato que si una ecuación de primer grado con 2 incógnitas tiene solución, entonces tiene infinitas soluciones. Queremos caracterizar los pares (x, y) que satisfacen la ecuación planteada.

$$2x - y = 7$$
$$-y = 7 - 2x$$
$$y = -7 + 2x$$

Es decir que el conjunto de soluciones es $\{(x, y) / y = 2x - 7\}$.

Graficado el conjunto de soluciones obtenemos una recta: la representación gráfica de la función: y = 2x-7.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación:

$$2x + 3y = x + y + 2(y + 5)$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$2x + 3y = x + y + 2y + 10$$
$$2x + 3y = x + 3y + 10$$
$$x + 0y = 10$$

Los pares $(10,0)(10,1)\left(10,-\sqrt{3}\right)(10,-2)$ y en general los pares de la forma (10,a) son solución de la ecuación. Graficando el conjunto de soluciones obtenemos nuevamente una recta: paralela al eje “y” por el punto (10,0).

Ejemplo 3

Es evidente que la ecuación:

$$0x + 0y = 3$$

carece de soluciones. Es “incompatible”.

Ejemplo 4

La ecuación $0x + 0y = 0$ se satisface cualquiera sea el par (x,y).
En general el conjunto de soluciones de una ecuación de la forma:

$$ax + by = c$$

con “a” y “b” números reales no simultáneamente nulos es siempre una recta del plano.
Esto sigue de notar que si $b \neq 0$, entonces la ecuación ax+by=c puede escribirse (sin alterar su conjunto de soluciones) en la forma:

$$y = (a / b).x + (c / b)$$

Además, por la hipótesis, si no sucede que $b \neq 0$, es decir, si b = 0, entonces $a \neq 0$ y la ecuación puede escribirse en la forma:

$$x = c / a$$

lo que es una recta del plano, paralelo al eje “y” por el punto (c/a, 0).

4.3. Sistema de dos ecuaciones de 1° grado con dos incógnitas.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

de dos ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas. Un par (x,y) es solución de este sistema si verifica simultáneamente las 2 ecuaciones.
Por ejemplo, consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$$

(1,-1) es solución del sistema pues

$$2(1) - 3(-1) = 5$$
$$1 + 4(-1) = -3$$

(4,1) no es solución del sistema

$$2(4) - 3(1) = 5$$
$$4 + 4(1) = 8 \neq -3$$

Antes de estudiar un procedimiento general para resolver tales sistemas daremos ejemplos de sistemas cuyas soluciones son "evidentes".

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x + 0y = 2 \\ 0x + y = -5 \end{cases}$$

admite únicamente la solución (2,-5).

Ejemplo 2

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0.x + 0.y = -5 \end{cases}$$

La segunda ecuación carece de soluciones, por lo tanto el sistema también carece de soluciones. Decimos que es "incompatible".

Ejemplo 3

$$\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 0.x + 0.y = 0 \end{cases}$$

La 2° ecuación se verifica trivialmente cualquiera sea el par (x,y).Por consiguiente toda solución de la 1° ecuación es solución del sistema.

Ejemplo 4

$$\begin{cases} 3x + 0y = 1 \\ 0x - 4y = 2 \end{cases}$$

tiene las mismas soluciones que el sistema

$$\begin{cases} x = 1/3 \\ y = -1/2 \end{cases}$$

cuya única solución es (1/3; -1/2).
El procedimiento para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas consistirá esencialmente en pasar del sistema dado a otro, que tenga las misma soluciones que el 1° pero en el cual las soluciones (o la falta de ellas) se pongan en evidencia.
Sistemas que tienen el mismo conjunto de soluciones se denominan "sistemas equivalentes".

Ejemplo 5

Resolver el sistema:

$$\text{I}\begin{cases}2x+5y=9\\3x-5y=1\end{cases}$$

Todo par (x,y) que sea solución del sistema I es también solución de la ecuación.

$$\left(2x+5y\right)+\left(3x-5y\right)=9+1$$

(que se obtiene "sumando" las dos ecuaciones de I) o sea la ecuación.

$$5x+0y=10$$

Por lo tanto, toda solución del sistema I es también solución del sistema.

$$\begin{cases}2x+5y=9\\5x+0y=10\end{cases}$$

también del sistema

$$\text{II}\begin{cases}2x+5y=9\\x+0y=2\end{cases}$$

Observe que toda solución de II es también solución de la ecuación.

5(x+0y)-(2x+5y)=5(2)-9

que es la 2° ecuación de I. Por lo tanto toda solución del sistema II es también solución del sistema I. Es decir, I y II son sistemas equivalentes.
Ambos sistemas tienen exactamente el **mismo conjunto de soluciones** pero el II presenta la ventaja de que en su 2° ecuación aparece solamente una incógnita (decimos que se ha "eliminado" la incógnita "y").
En forma análoga, construiremos ahora, a partir de II, un sistema en cuya primera ecuación aparezca eliminada la incógnita "x".
Para ello reemplazamos la 1° ecuación de II por la que se obtiene de sumarle la 2° multiplicada por –2, o sea:

$$0x+5y=5$$

o equivalentemente

$$0x+y=1$$

Se tiene así el sistema:

$$\text{III}\begin{cases}0x+y=1\\x+0y=2\end{cases}$$

equivalente al sistema II (y por lo tanto al I), pero que pone en evidencia su única solución, que es el par (2,1).

Observación
El sistema II muestra que sólo puede ser soluciones aquellos pares (x,y) en los cuales se tengan x=2. Teniendo en cuenta esta condición, la primera ecuación del sistema II permite obtener de inmediato el valor de "y".

Ejemplo 6

Resolver el sistema:

$$\text{I}\begin{cases}3x+5y=6\\2x+4y=5\end{cases}$$

Reemplazando la 2° ecuación de I por la que se obtiene sumándole la 1° multiplicada por –2/3.
Resulta el sistema:

$$\begin{cases} 3x+5y=6 \\ 0x+2/3y=1 \end{cases}$$

o, equivalentemente:

$$\text{II}\begin{cases} 3x+5y=6 \\ 0x+y=3/2 \end{cases}$$

Reemplazando la 1° ecuación de II por la que se obtiene sumándole la 2° multiplicada por –5 se obtiene:

$$\text{II}\begin{cases} 3x+0y=-3/2 \\ 0x+y=3/2 \end{cases}$$

o, equivalentemente:

$$\text{III}\begin{cases} x+0y=-1/2 \\ 0x+y=3/2 \end{cases}$$

Un razonamiento similar al efectuado en el ejemplo anterior nos convencerá que los sistemas I, II y III son equivalentes y tienen a $\{(-1/2;\ 3/2)\}$ por conjunto de soluciones.

Ejemplo 7

Resolver el sistema.

$$\text{I}\begin{cases} 9x-6y=3 \\ 12x-8y=3 \end{cases}$$

Reemplazando la 2° ecuación de I por la que se obtiene de sumarle la 1° multiplicada por –4/3 se obtiene el sistema.

$$\text{II}\begin{cases} 9x-6=3 \\ 0x+0y=-1 \end{cases}$$

Toda solución del sistema I es solución del II este carece de soluciones; luego el sistema I también carece de soluciones.

Ejemplo 8

Resolver el sistema.

$$\text{I}\begin{cases} 2x-5y=7 \\ 4x-10y=14 \end{cases}$$

Reemplazando la 2° ecuación por la que resulta de sumarle la 1° multiplicada por (-2) se obtiene el sistema.

$$\text{II}\begin{cases} 2x-5y=7 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$$

equivalente al sistema I.
La 2° ecuación de este último sistema se verifica trivialmente cualquiera sea el par (x, y) y por consiguiente el conjunto de soluciones del sistema planteado es $\{(x,y)/\,y=-7/5+(2/5)x\}$.

Observando que la 2° ecuación de I es la 1° multiplicada por 2 podríamos haber deducido de inmediato que ambas ecuaciones tienen exactamente el mismo conjunto de soluciones.
En los ejemplos y ejercicios hemos visto que un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas puede tener:

a) una única solución.
b) ninguna solución.
c) infinitas soluciones.

Nos preguntamos ¿son estos los únicos tipos de resultados que podemos obtener? Es fácil ver que realmente es así.
En efecto, sea el sistema.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

Si "a" y "b" no son nulos simultáneamente, lo mismo que "a_1" y "b_1", hemos visto que el conjunto de soluciones de cada ecuación puede pensarse como una recta en el plano. Por consiguiente el problema de resolver un sistema de este tipo es equivalente al problema de encontrar la intersección de 2 rectas en el plano.
La geometría elemental nos enseña que 2 rectas en el plano pueden:

a) cortarse en único punto; esto es, el sistema tiene solución única.
b) ser paralela; el sistema carece de soluciones.
c) ser coincidentes, en cuyo caso el sistema tiene infinitas soluciones.

4.4. Ecuación de 2° grado con una incógnita.

Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ se llama ecuación de 2° grado con una incógnita.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^2-9=0$.
Escribir $x^2-9=0$ es equivalente a escribir $x^2=9$.
Es inmediato que esta última ecuación se satisface si x = 3 ó x=-3; {-3; 3} es el conjunto de soluciones de la ecuación de 2° grado planteada.

Ejemplo 2

$4x^2+10=0$.
Para todo número real "x" el número $4x^2+10$ es positivo, por lo tanto la ecuación planteada carece de solución real

---

Ejemplo 3

Resolver $5x^2-2x=0$.
Para todo número "x" resulta $5x^2-2x=x(5x-2)$ y recordando que el producto de 2 números es "0" si y sólo si alguno de los factores es "0" podemos decir que:
$5x^2-2x=0$ si y sólo si $(x=0)$ o´ $(5x-2=0)$.
Por consiguiente las soluciones de la ecuación planteada son los números 0 y 2/5.

Ejemplo 4

Resolver $x^2-6x+5=0$.
Empleamos el método de completar cuadrados:

$$x^2-6x+5=(x^2-6x+9)+5-9=(x-3)^2-4$$

Escribimos la ecuación (1) en la forma $(x-3)^2-4=0$ ó, equivalentemente, $(x-3)^2=4$ luego x-3 debe ser tal que elevado al cuadrado dé 4:

$$(x-3=2) \text{ ó } (x-3=-2) \text{ y de allí que } (x=5) \text{ y } (x=1)$$

son las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 5

Encontrar el conjunto de soluciones de la ecuación.

$$5x^2+10x+5=0$$

$$5x^2+10x+5=5\left(x^2+2x+1\right)=5\left(x+1\right)^2$$

Por consiguiente resolver la ecuación $5x^2+10x+5=0$ es equivalente a encontrar los números "x" tales que $\left(x+1\right)^2=0$.

Pero $\left(x+1\right)^2=0$ sí y solo si $x+1=0$.

Luego el conjunto de soluciones de la ecuación planteada es {-1}.

Ejemplo 6

Resolver la ecuación

$$x^2+x+1=0$$

Completamos cuadrados

$$x^2+x+1=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Para todo número real "x" el número

$$\left(x+1\right)^2+\frac{3}{4}$$

es positivo. Por consiguiente la ecuación no tiene solución (real).

La técnica de completar los cuadrados nos sirve también para encontrar una "fórmula" para resolver la ecuación de 2° grado.

Al estudiar la parábola vimos que si $a\neq 0$:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4ac^2}\right]$$

Las soluciones de la ecuación planteada son las soluciones de la ecuación

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

que podemos escribir:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$4a^2$ es u número positivo. Por consiguiente el signo de $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ depende del signo del número $\left(b^2-4ac\right)$ llamado el **discriminante** de la ecuación.

Distinguimos 3 casos:

1°) $\boxed{b^2-4ac>0}$

Resulta: $x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ó $x+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

y por consiguiente

$$x=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ó $x=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2°) $\boxed{b^2-4ac=0}$.

Resulta $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ que satisface si y sólo si $x+\frac{b}{2a}=0$ y de allí que la única solución de la ecuación sea el número $\frac{-b}{2a}$.

3°) $\boxed{b^2-4ac<0}$.

No existe ningún número real cuyo cuadrado sea un número negativo.
Por consiguiente la ecuación planteada carece de soluciones reales.

4.5. Soluciones complejas de una ecuación de 2° grado

La ecuación $x^2=-1$, no tiene solución en los números reales, puesto que ningún número real tiene cuadrado negativo.
Por la misma razón, si "a" es un número real positivo, la ecuación $x^2=-a$ no tiene solución.
Tampoco tiene solución la ecuación general de 2° grado $ax^2+b+c=0$ cuando es $b^2-4ac<0$.
Son precisamente estas situaciones las que condujeron a "inventar" los números complejos.
Recordemos que un número complejo tiene la forma $a+bi$ siendo "a" y "b" números reales e "i" un símbolo caracterizado por la propiedad $i^2=-1$.
Disponiendo de los números complejos la ecuación $x^2+1=0$ tiene la soluciones x = i, x = -i. La ecuación $x^2=-a$ (a>0) tiene las soluciones $x=\sqrt{a}i$, $x=-\sqrt{a}i$.
En cuanto a la ecuación general $ax^2+bx+c=0$ las fórmulas

$$x=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

dan también las soluciones (complejas) en el caso $b^2-4ac<0$.

Ejemplo

$2x^2-5x+4=0$ tiene soluciones:

$x=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{25-35}}{4}$, *i.e.*, $x_1=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i$, $x_2=\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i$

4.6. Reconstrucción de la ecuación de 2° grado conocidas sus raíces.

Nos planteamos el siguiente problema: dados dos números "α" y "β" queremos ver si es posible encontrar una ecuación de 2° grado cuyas soluciones sean exactamente esos 2 números.
El problema de encontrar una ecuación $ax^2+bx+c=0$ que cumple la condición impuesta es equivalente al problema de encontrar un polinomio de 2° grado.

$$F=ax^2+bx+c \qquad [1]$$

y tal que, $F(\alpha)=0,\ F(\beta)=0$.

Recordemos que el polinomio $(x-\alpha)(x-\beta)$ verifica la condición

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

Comparado con (1) resulta:

$$a=1 \qquad b=-(\alpha+\beta) \qquad c=\alpha\beta$$

por consiguiente la ecuación pedida será:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+(\alpha\beta)=0$$

Observación
Si "k" es cualquier número real distinto de "0" la ecuación

$$kx^2-k(\alpha+\beta)x+k(\alpha\beta)=0$$

tiene las mismas raíces que la anterior y por consiguiente es una solución del problema planteado.

Aplicación
Encontrar dos números "α" y "β" conocida su suma "s" y su producto "p".

$$\alpha+\beta=s \qquad\qquad \alpha\beta=p$$

De acuerdo a las consideraciones anteriores los números pedidos serán las soluciones de la ecuación:

$$x^2-sx+p=0$$

Ejemplo

Encontrar dos números cuyo producto sea 2 y cuya suma sea 3. Si existen tales números serán soluciones de la ecuación $x^2-3x+2=0$.

$$x^2-3x+2=\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+2-\frac{9}{4}=\left(x\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

de donde

$$x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \text{ ó } x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

es decir x=2 ó x=1
Los números pedidos son 1 y 2.

4.7. Sistemas mixtos. Métodos de sustitución.

Consideremos un sistema mixto formado por 2 ecuaciones con 2 incógnitas, una ecuación de 1° grado y al otra de 2° grado.
Un método general para resolver sistemas de este tipo consiste en despejar el valor de una de las incógnitas en la ecuación de 1° grado y reemplazar dicho valor de una de las incógnitas en la ecuación de2° grado, que queda entonces con una sola incógnita.
Por ejemplo, encontrar los pares (x, y) que verifican el sistema

$$x^2+y^2=25$$

$$7x-y=25$$

Despejando y de la ecuación de 1° grado

$$y=-25+7x$$

Reemplazando este valor en la ecuación de 2° grado

$$x^2+(-25+7x)^2=25$$

$$x^2+25^2-350x+49x^2-25$$

$$50x^2-350x+600=0$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$x^2-7x+12=x^2-7x+\frac{49}{4}+12-\frac{49}{4}=\left(x-7/2\right)^2-1/4=0$$

$$x-\frac{7}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{o´} \quad x-\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$x=4 \quad \text{o´} \quad x=3$$

luego

$$y=-25+7x4=3 \text{ ó } y=-25+7x3=-4$$

Las soluciones son los pares (3, 4) y (3, -4).

4.8. Ejercitación de la Unidad 4

1. Resolver las siguientes ecuaciones. Verificar la solución encontrada.

   a) $6X+6=2X-2$

   b) $\frac{X}{2}-\frac{3}{4}X-\frac{5}{4}X=6$

   c) $\frac{X}{X^2+4}=\frac{4}{X^2+4}$

   d) $2+\frac{1}{X^4+2}=2+\frac{1}{X^4+2}$

   e) $\frac{X+2}{2}-\frac{X-1}{4}=\frac{X+3}{8}$

   f) $(X-2)(X-3)=(X-5)(X-4)$

   g) $\frac{X+3}{2X}+\frac{5}{X-1}=\frac{1}{2}$

   h) $\frac{X+2}{X+2}=\frac{X-4}{X+4}$

   i) $\frac{3X+1}{X+2}=\frac{3X-2}{X+1}$

   j) $\frac{2}{X-3}-\frac{4}{X+3}=\frac{16}{X^2-9}$

2. Representar gráficamente el conjunto de soluciones de la ecuación 4x+2y-8=0.

3. Resolver analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

   a) $\begin{cases} 2X-Y=4 \\ X+2Y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} X+Y=2 \\ 2X+2Y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} X+Y=1 \\ 4X+4Y=4 \end{cases}$

4. Resolver analíticamente los siguientes sistemas:

   a) $\begin{cases} 0X+3Y=6 \\ 2X=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} X+Y=1 \\ X-Y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X-Y=4 \\ X+Y=5 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} 2X+3Y=3 \\ 6Y-6X=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5Y=3-2X \\ 3X=2Y+1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} X-Y=1 \\ 2X-2Y=2 \end{cases}$

   g) $\begin{cases} 3X-15Y=7 \\ X-5Y=-2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \frac{X-2}{3}+\frac{Y+1}{6}=2 \\ \frac{X+3}{4}-\frac{2Y-1}{2}=1 \end{cases}$

5. ¿Para qué valores de “a” el sistema

   $$\begin{cases} aX+8Y=0 \\ aX-9Y=0 \end{cases}$$

   tiene soluciones distintas de la solución (0,0)?

6. Determinar para qué valores de “a” y “b” el sistema

$$\begin{cases} a^2X + aY + 1 = 0 \\ b^2X + bY + 1 = 0 \end{cases}$$

a) tiene una única solución.
b) tiene infinitas soluciones.
c) carece de solución.

7. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas, en caso de ser posible:

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 6x + 10y = 22 \end{cases}$ R:Indeterminado

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 6x + 10y = 21 \end{cases}$ R:Incompatible

c) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$ R:(2;1)

8. Resuelva los siguientes sistemas para “x” e “y”:

a) $\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 17 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ R:(2;1), (14/23;-41/23)

b) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3y = 8 \\ 2x^2 - 5y^2 + 2y = 15 \end{cases}$ R: $(3;1)$, $(-3;1)$, $\left(\sqrt{619}/9;-1/9\right)$, $\left(-\sqrt{619}/9;-1/9\right)$

9. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $X^2 + 3X = 0$ b) $2X^2 - 8 = 0$ c) $3X^2 + 27 = 0$

d) $(X+4)(X-2) = 0$ e) $4X^2 = 0$ f) $X^2 - 5X + 6 = 0$

g) $X^2 - 4X + 4 = 0$ h) $X^2 - 6X + 25 = 0$ i) $\dfrac{X^2+2}{X^2-1} = \dfrac{X+4}{X+1}$

j) $\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X-1} = \dfrac{8}{3}$ k) $\dfrac{1}{X+2} + \dfrac{1}{X-2} = 1$ l) $\sqrt{2X+1} = \sqrt{X} + 1$

8. Determinar los valores de “b” para que la ecuación: $X^2+bX+4=0$
a) tenga dos soluciones reales.
b) tenga una única solución real.
c) carezca de soluciones reales.

9. ¿Para qué valores de “a” la siguiente ecuación carece de solución real?

$$(a-1)X^2 - 2(a+2)X + (a-4) = 0$$

10. Encontrar una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean los números:
a) 3;-2
b) -4;2/3
c) -3/4;5/6

11. Si la suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 10 y su producto 15 ¿Cuál es la ecuación?.

12. Determínese k de tal modo que las dos soluciones de las ecuaciones siguientes sean iguales.

a) $X^2 + kX + 2k = 0$

b) $X^2 + 2(k-2)X - 8k = 0$

13. Encuéntrese el valor de k para que la suma de las soluciones sea igual al producto de las mismas en las ecuaciones siguientes.

$$a)\ 2X^2+(k-3)X+3k-5=0$$
$$b)\ 3X^2+(k+2)X+2k+1=0$$

14. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases}XY=-2\\2X+Y=0\end{cases}\qquad c)\begin{cases}X-Y=1\\X^2+XY+Y^2=7\end{cases}\qquad e)\begin{cases}2X^2-XY+Y^2=14\\X-2Y=0\end{cases}$$

$$b)\begin{cases}XY=20\\-3=2X-Y\end{cases}\qquad d)\begin{cases}X^2+Y^2=4\\X^2+XY+Y^2=2\end{cases}\qquad f)\begin{cases}X^2+4Y^2=13\\2X^2-Y^2=17\end{cases}$$

15. Encontrar los puntos de intersección de la recta $Y=-2X+1$ con la parábola $Y=X^2+5X+1$.

Problemas

Para resolver problemas planteados con palabras puede considerar las siguientes sugerencias:

1) Lea con mucho cuidado el problema, de manera que sepa exactamente lo que dice y lo que pregunta.
2) Haga un dibujo o un cuadro que resuma la información dada.
3) Identifique la cantidad desconocida y asígnele una letra. Asegúrese de que representa un número (por ejemplo, kilómetros, litros, o tiempo).
4) Observe las condiciones o restricciones que pone el problema sobre la incógnita. Transfórmela en una ecuación.
5) Resuelva la ecuación. El resultado es un número específico. La incógnita es ahora un valor conocido.
6) De la conclusión en palabras.
7) Analice si su respuesta es razonable.

16. Los grados Celsius y los Fahrenheit, están relacionados por la fórmula C = 5/9(F-32).
    a ¿Qué temperatura en grados Fahrenheit corresponde a 30 grados Celsius?
    b ¿Qué temperatura hay (en grados Fahrenheit) si un termómetro en grados Celsius da la misma lectura que un termómetro en grados Fahrenheit?
    c ¿Qué temperatura hay (en grados Celsius) si la temperatura dada en grados Celsius es la mitad de la temperatura dada en grados Fahrenheit?
17. A las 14:00 hs Carlos salió de la ciudad de Córdoba, hacia el sur a 45 km por hora. Una hora más tarde Raúl salió detrás de él a 60 km por hora. ¿Cuándo alcanzará Raúl a Carlos?
18. ¿Cuántos litros de una solución de ácido nítrico al 60% deben añadirse a 10 litros de una solución al 30% para obtener una solución al 50%?
19. Un tanque contiene 1000 litros de salmuera al 30%. Si se evapora por ebullición parte del agua de la solución, se incrementa el porcentaje de sal, ¿Qué cantidad de agua debe evaporarse para obtener una solución al 35%?
20. Un alambre de 130 cm de largo está doblado en forma de un rectángulo que tiene 3 cm más de largo que de ancho. Encuéntrese el ancho del rectángulo.
21. Diofanto vivió un sexto de su vida como niño, una doceava parte de su vida como jóven y una séptima parte de vida como adulto soltero. Un hijo nació 5 años después del matrimonio de Diofanto, pero este hijo murió 4 años antes de su padre. Diofanto vivió el doble que su hijo. Calcúlese la edad que tenía Diofanto cuando murió.
22. Encuéntrese dos números cuya suma sea 1/3 y cuya diferencia sea 3.
23. En un corral con aves y conejos hay 23 cabezas y 60 patas. ¿Cuántas aves y cuántos conejos hay?

24. Una solución al 40% de alcohol debe mezclarse con una al 90% para obtener 50 litros al 50%. ¿Cuántos litros de cada solución deben utilizarse?
26. Un rectángulo tiene un perímetro de 26 cm y un área de 30. Encuéntrense sus dimensiones.
27. Un alambre de 40 cm de longitud se cortó en dos pedazos. Una de las partes se dobló haciendo un cuadrado y la otra un rectángulo que es tres veces más largo que ancho. La suma del área del cuadrado y del área del rectángulo es de 55 ¾ cm^2. ¿En qué lugar se cortó el alambre?
28. En un juego de basquetbol se obtuvieron ganancias netas de $ 45,80 al vender recuerdos y refrescos, los que les costaron $0,08 por unidad. Si vendieron 480 recuerdos y 610 refrescos, ¿cuál fue el precio de la venta de cada uno si el precio combinado de un recuerdo y un refresco fue de $ 0,25?

    R: refrescos = $ 0,10, recuerdos = $ 0,15.
29. Las entradas para una fiesta de estudiantes costaron $ 8 por personas y $ 15 por pareja. Si a la fiesta asistieron 144 personas y se recaudaron $ 1.098 por venta de entradas. ¿Cuántas parejas y cuantas personas solas asistieron a la fiesta?

    R: parejas = 54, solos = 36.
30. Un triángulo tiene un perímetro de 54 cm. Calcule las longitudes de los tres lados si el lado más largo es el doble del más corto y el otro es 6 cm más largo que el más corto.

    R: 12, 18, 24.
31. Tres ciudades forman un triángulo. La distancia de la ciudad A a la B es de 6 km más que la distancia de la ciudad B a la C. La distancia de la ciudad A a la C es 6 km menos que la distancia de la ciudad B a la C. Calcule la distancia de la ciudad A a la C si la distancia de la ciudad A a la B más la distancia de la ciudad B a la C es de 50 km.
32. El punto (3; 9) está sobre la parábola $y = x^2$. Para toda m, la recta y-9=m(x-3) pasa por el punto (3; 9). Halle el valor de m tal que la recta y la parábola se intercepten exactamente en un punto. Sugerencia: recuerde que $ax^2+bx+c=0$ tiene exactamente una solución si y solo si $b^2-4ac=0$.

    R: m=6
33. Halle dos números positivos cuyas diferencia sea 1 y cuyo producto sea 56.

    R: 8, 7.
34. Encuentre dos números tales que la suma de sus cuadrados sea igual a 113 y la diferencia de sus cuadrados sea igual a 15.

    R: 8, 7,-8,-7.

4.9. Resolución de Problemas. Planteamiento de problemas.

Autor: Ing. *Héctor Gabriel Tavella*.

4.9.1. Introducción.

En este capítulo nos ocuparemos del planteamiento de problemas; es decir, dada una cierta situación, como plantear la misma en forma de expresiones matemáticas, estableciendo las ecuaciones que permitirán resolverlas. Hay que destacar que la solución de estas ecuaciones no se tratará aquí, por haber sido abordada en los capítulos correspondientes.
Los problemas típicos se dividen en pasos pequeños. Desagregando el problema en pasos pequeños. Desagregando el problema en pasos menores se facilita su resolución, y pueden evitarse la mayoría de los errores comunes. Sin embargo, el estudiante eventualmente cometerá errores, y de su análisis y corrección podrá evitarse que los mismos se reiteren más adelante.
La metodología de trabajo que seguiremos en este texto será la siguiente:

Se propondrá al estudiante una secuencia de problemas cuya dificultad aumentará en forma gradual. En muchos de los casos el mismo texto, a modo de ejemplo, explicitará el planteo. En otros casos, el problema será desagregado en planteos simples, los que se interrogarán al estudiante, quien deberá responder las preguntas en el espacio dispuesto a tal efecto (RESPUESTA:.....................)desarrollando así, paso a paso, las ecuaciones correspondientes al planteamiento del problema.
La mejor manera de aprender a hacer algo es haciéndolo, por lo que se recomienda responder todas las preguntas propuestas a medida que sean formuladas, evitando avanzar en la lectura del texto sin haberlo hecho. En caso de manifestar dificultades para responder alguna pregunta, podrá consultarse la respuesta, ya que cada interrogación está numerada y todas las respuestas se encuentran al final del Capítulo.

4.9.2. Formulación de expresiones algebraicas.

Si tengo un número que desconozco, puedo denominarlo "x". si "x" es un número, entonces dos unidades más que ese número podrá expresarse como x+2.

1) ¿Cómo expresaré el número resultante de sumarle cinco unidades al número "x"?

Respuesta:...

De la misma manera, podremos expresar al triple de "x" como 3x. Cinco unidades más que el triple de "x" será 3x+5.

2) ¿Cuánto es tres unidades más el doble de "x"?

Respuesta:...

3) Si a "x" la sumo cuatro, luego duplico el resultado, y finalmente sumo tres, ¿qué obtengo?

Respuesta:...

Si "x" y "y" son dos números distintos, su suma podrá expresarse como x+y.

4) ¿Cómo expreso su producto?

Respuesta:...

La suma del triple del primer número ("x") y el doble de ("y") será 3x+2y.

5) ¿Cómo expreso la suma del doble del primer número, la mitad del segundo, y el número siete?

Respuesta:..

El producto del primer número, por tres unidades más que el segundo podrá expresarse como x(y+3).

6) ¿Cómo expreso el producto de dos unidades más que el primero, por tres menos que el segundo?

Respuesta:...

Si al suma de estos dos números "x" y "y" es doce, entonces esta se expresará así: x+y = 12.

7) ¿Cómo expreso que el producto de estos dos números es quince?

Respuesta:..

4.9.3. Planteamiento de Problemas.

Problema

Tres unidades más que el doble de cierto número es igual a quince. Determinar cuál es el número.

Solución

Si a ese número que desconozco la llamo "x", sólo tengo que plantear, en la forma similar a como la hemos hecho anteriormente, 2x+3 = 15. Resolviendo esta ecuación (algo que como ya que el, número en cuestión es el seis (x = 6).

Problema

Si al número veinte le resto el triplo de cierto número, obtengo como resultado el número ocho. Determinar el valor del número desconocido.

8) ¿Cómo planteo este problema?

Respuesta:...

Problema:

Si se suman dos números se obtiene veinticuatro, y se resta el segundo número del primero el resultado es seis. Hallar el valor de dichos números.

Solución

Si llamamos “x” al primer número y “y” al segundo, plantearemos, según lo expresado en el enunciado:

“Si se suman dos números se obtiene veinticuatro”.

$$\underline{x + y = 24}$$

“Si se resta el segundo número del primero el resultado es seis”.

$$\underline{x - y = 6}$$

Entonces el valor de ambos números puede hallarse a partir de las dos ecuaciones que se han planteado, mediante los métodos que se detallan en el capítulo correspondiente. Aquí, lo reiteramos, sólo nos referimos a la forma de plantear las ecuaciones.

Problema:

La suma de dos números es seis. Si al duplo del primero le sumo la mitad del segundo obtengo también seis. Determinar cuáles son esos números.

9) ¿Cómo planteo este problema?

Respuesta:..

Problema

La suma de tres números consecutivos es dieciocho. Determinar cuáles son esos números.

Solución

Si llamamos “x” al primer número, su consecutivo será el número $\underline{x+1}$. El consecutivo de éste será el número: $\underline{(x+1)+1}$, es decir $\underline{x+2}$.

Planteamos entonces según expresa el enunciado

“La suma de tres números consecutivos es dieciocho”

$$\underline{x+(x+1)+(x+2) = 18}$$

Ecuación ésta que permite resolver el problema.

Problema

El producto de dos números consecutivos es treinta. Determinar cuáles son esos números.

10) ¿Cómo planteo este problema?

Respuesta:...

Problema

Una cuerda de doce centímetros de largo debe cortarse en dos partes, de modo que una de las partes sea tres centímetros más corta que el doble de la otra. Hallar la longitud del trozo más corto.

Solución

Si llamamos “x” a la longitud de uno de los trozos y “y” a la longitud del otro, la suma de sus longitudes será la longitud total de la cuerda.

11) ¿Cómo planteamos que la longitud total de la cuerda es de doce centímetros?

Respuesta:...

Ahora bien, uno de los trozos (“y”) es de longitud igual al doble de la otra (“x”) menos tres centímetros.

12) ¿Cómo planteo esta situación?

Respuesta:...

De las dos ecuaciones que resultan al responder las preguntas 11 y 12 pueden obtenerse el valor de “x” y el “y”. Entonces puede seleccionarse el menor de estos valores, que corresponderá a la respuesta del problema.

Problema:

La recaudación total por venta de entradas un sábado a la noche de una confitería bailable fue de $ 1.500.-, siendo el importe de las entradas de $ 10.- para los hombres, y de solo $ 5.- para las mujeres. Si el número total de entradas vendidas fue de 198, determinar cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron a la fiesta.

Solución

Si llamamos “x” a la cantidad de hombres que pagaron su entrada y “y” a la de mujeres que abonaron la suya, y el total de entradas vendidas fue de 198.

13) ¿Cómo plantearíamos esta situación?

Respuesta:..

Si cada hombre debió abonar $ 10.- para ingresar, y al número de hombres que abonaron su entrada la hemos denominado “x”.

14) ¿Cuál es el monto del ingreso por venta de entradas masculinas?

Respuesta:...

15) ¿Y el ingreso por venta de entradas femeninas?

Respuestas:..

Evidentemente, la suma de la recaudación obtenida por la venta de entradas masculinas y la ingresada por entradas resulta ser la recaudación total, la que según recordamos es de $ 1.500.

16) ¿Cómo puede plantearse lo expresado en este último párrafo?

Respuesta:...

De las respuestas a las preguntas 13 y 16 resultan las ecuaciones que nos permiten resolver este problema.

Problema

El sábado siguiente al del problema anterior, la confitería bailable organizó otra fiesta, la que resultó un fracaso (al menos para los varones) ya que si bien se repitió la recaudación del sábado anterior ($ 1.500.-) la concurrencia masculina fue exactamente el doble que la femenina. Si se mantuvieron los precios de las entradas, determinar cuántos hombres y cuántas mujeres abonaron la suya.

17) ¿Cómo planteo este problema?

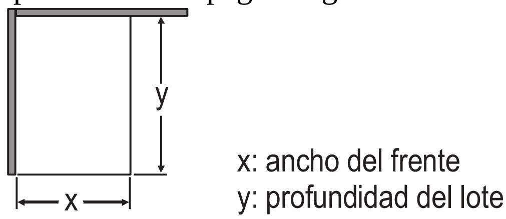
Respuesta:...

Problema:

Un lote rectangular debe ser cercado en su frente y a uno de sus lados, no así en su costado izquierdo ni en el fondo, por existir en ambos casos paredes medianeras que separan el lote de las propiedades vecinas. El lote tiene el doble de profundidad que de frente, y su superficie es de quinientos doce metros cuadrados. Calcular la longitud de la cerca.

Solución

Siempre que sea posible debe trazarse un gráfico que represente la situación planteada. Si denominamos “y” a la profundidad del terreno y “x” al ancho del frente, podremos realizar un esquema como el que puede apreciarse en la página siguiente.



Según lo expresamos en el enunciado: “el lote tiene el doble de profundidad que de frente”.

18) ¿Cómo planteamos esta situación?

Respuesta:...

Recordando que el área de un rectángulo es igual al producto del ancho del mismo por su largo, y considerando que el área de este terreno es de quinientos doce metros cuadrados.

19) ¿Cómo planteamos esta situación?

Respuesta:...

Resolviendo las ecuaciones que resultan de las respuestas a las preguntas 18 y 19 pueden obtenerse los valores del ancho (“x”) y profundidad del terreno (“y”).

Sin embargo, estos no responden lo requerido por el problema, ya que en este caso se pide “calcular la longitud de la cerca”.

20) ¿Cómo expresamos entonces la longitud de la cerca?

Respuesta:...

Resulta importante destacar que la respuesta de un problema no siempre es el valor de la/s incógnita/s de la/s ecuación/es planteada/s, como puede comprobarse en el caso anterior, ya que esto depende la forma en que se realice el planteo.

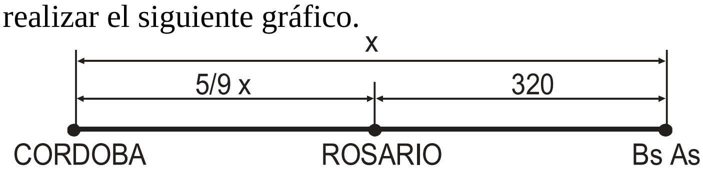
Para ejemplificar esto analicemos el siguiente problema, consideremos dos formas en las que el mismo puede ser planteado, de acuerdo a qué parámetro se denomine “x”.

Problema

Un viajero, que partiendo de Córdoba se dirige a Buenos Aires, comprueba al llegar a Rosario que según su mapa carretero ha recorrido 5/9 partes de su viaje. Si aún le quedan trescientos veinte kilómetros para arribar a su destino, determinar la distancia que hay entre Córdoba y Buenos Aires.

Solución “A”

Si denominamos “x” a la distancia entre Córdoba y Buenos Aires, según el enunciado del problema, podremos realizar el siguiente gráfico.



De acuerdo al mismo, la distancia Córdoba-Buenos Aires es la suma de las distancias Córdoba-Rosario y Rosario-Buenos Aires.

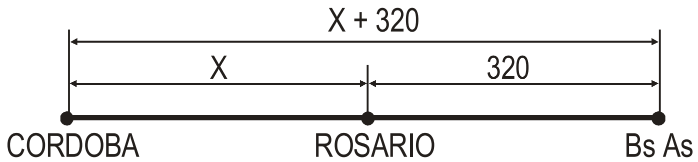
21) ¿Cómo planteamos esto?

Respuesta:..

Resolviendo esta ecuación podremos encontrar el valor de “x”, la distancia Córdoba-Buenos Aires en este caso, respuesta a nuestro problema.

Solución “B”:

Si denominamos “x” a la distancia entre Córdoba y Rosario; según el enunciado del problema, podremos realizar el siguiente gráfico.



De acuerdo a lo expresado en el enunciado, la distancia Córdoba-Rosario equivale a 5/9 partes de la distancia Córdoba-Buenos Aires.

22) ¿Cómo planteamos esto?

Respuesta:...

Resolviendo esta ecuación podremos encontrar el valor de “x”, la distancia Córdoba-Rosario, que en este caso no será la respuesta a nuestro problema, ya que en él se pide determinar la distancia que hay entre Córdoba y Buenos Aires.

23) ¿Cómo expresamos entonces este valor requerido?

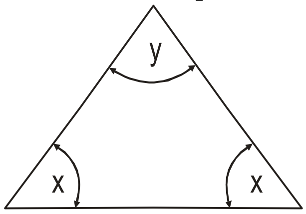
Respuesta:...

Problema

Cada uno de los ángulos de la base de un triángulo isósceles es el doble del ángulo en el vértice. Hallar los ángulos.

Solución

Realicemos un esquema que represente la situación planteada en el enunciado.



Recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°, y considerando lo expresado en el enunciado de que “cada uno de los ángulos en la base es el doble que el ángulo en el vértice”.

24) ¿Cómo plantearíamos este problema?

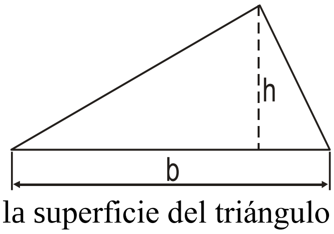
Respuesta:..

Problema:

Cierto triángulo tiene una superficie de veinticinco centímetros cuadrados. Si se acorta la base en dos centímetros y se mantiene la misma altura, la superficie del nuevo triángulo resultante es de veinte centímetros cuadrados. Calcular la base del primer triángulo.

Solución

Para el caso del primer triángulo podremos hacer un esquema como el de la figura (triángulo “a”).



Según lo establecido en geometría, la superficie del triángulo “a” de la figura anterior es:

$$Sa = \frac{b \cdot h}{2}$$

25) ¿Cómo plantearíamos que la superficie del triángulo “a” es de veinticinco centímetros cuadrados?

Respuesta:...

Si se acorta la base en dos centímetros y se mantiene la misma altura, obtendremos un nuevo triángulo al que denominaron “b”.

26) ¿Cómo será la figura correspondiente al caso del triángulo “b”?

Respuesta (Realizar el esquema):

27) De acuerdo a esta figura, ¿cuál será la expresión correspondiente a la superficie del triángulo “b”?(Sb = ?).

Respuesta:...

28) ¿Cómo plantearíamos que la superficie del triángulo ”b” es de veinte centímetros cuadrados?

Respuesta:...

Resolviendo las ecuaciones que surgen de las respuestas a las preguntas 25 y 28 podremos obtener valores de “b” y “h”, recordando que en el problema se pide calcular la base del primer triángulo, es decir “b”, que corresponderá entonces a la respuesta.

Problema:

La base de un triángulo es el triple de su altura, y su superficie es de 937,50 centímetros cuadrados. Determinar las dimensiones del triángulo.

29) ¿Cómo planteamos este problema? (Realizar el gráfico correspondiente antes de comenzar a plantear las ecuaciones).

Respuesta:...

Problema:

Un vendedor ambulante comprobó al final de un día de trabajo que, como resultado de las ventas de ese día, tenía en sus bolsillos 30 billetes, los que totalizaban un total de $ 110.- Si sólo tenía billetes de uno, cinco y diez pesos, y considerando que la cantidad de billetes de un peso era la misma que la suma de las cantidades de billetes de otras denominaciones, determinar cuántos billetes de cada tipo tenía en su poder.

Solución

30) ¿Cuántas incógnitas tiene este problema?, ¿cuáles son?

Respuesta:...

Designemos a cada una de ellas con alguna letra.

31) ¿Cómo expresamos el hecho de que la cantidad de billetes era de 30?

Respuesta:...

32) ¿Y el hecho de que la cantidad de billetes de un peso era la misma que la suma de las cantidades de billetes de otras denominaciones?

Respuesta:...

33) ¿Cómo podemos expresar la cantidad de dinero que el vendedor tenía en billetes de diez pesos?

Respuesta:...

34) ¿Y la que tenía en billetes de cinco peso?

Respuesta:...

35) ¿Y la que tenía en billetes de un peso?

Respuesta:...

36) ¿Cómo expresamos que la cantidad total del dinero era de $ 110?.

Respuesta:..
De las respuestas a las preguntas 31; 32 y 36 obtenemos las tres ecuaciones que no permitirán resolver el problema.

Problema

El cajero de un supermercado, al entregarle la caja a un compañero, verificó que en la misma había billetes de uno, cinco, diez y cincuenta pesos, totalizando sesenta y ocho billetes, los que representan la suma de $ 1.020.- También comprobó que los billetes de un peso eran los que más escaseaban, ya los billetes de cincuenta pesos eran cuatro más que lo de uno; los de diez pesos cuatro más que los de cincuenta, y finalmente, los de cinco pesos eran los más numerosos. Determinar cuántos billetes de cada tipo había en la caja.
Solución: Analizando el problema podemos establecer cuáles son las incógnitas y los datos. Igualmente, en este caso, podemos relacionar este problema con el anterior. Esto nos resulta de gran ayuda, ya que podríamos utilizar el mismo método, e incluso algunas de las ecuaciones planteadas serian parecidas a las del problema anterior.
37) ¿Cómo plantearíamos entonces las ecuaciones que permitan resolver este problema?
Respuesta:..

4.9.4. ¿Qué se necesita para resolver un problema?

En los problemas que hemos planteados anteriormente nos hemos enfrentado ante una determinada situación y la hemos llevado a la forma de expresiones matemáticas, estableciendo las ecuaciones que al ser resueltas nos permiten hallar la solución buscada. No hemos hecho hincapié en la resolución de estas ecuaciones ni, en consecuencia, en la solución numérica del problema. Debe tenerse en cuenta, sin embargo que estas son dos etapas muy importantes, ya que cuando nos hallamos ante un problema nos interesa llegar a su **solución**.
¿Cuáles son entonces los pasos o etapas que debemos seguir para resolver un problema?

A) Comprender El Problema
¿Cuáles son la/s incógnita/s?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Qué condición o condiciones hay?, ¿Son insuficientes, redundantes o contradictorias?

B) Concebir Un Plan.

- ¿Se ha encontrado alguna vez con un problema semejante, o relacionado con éste? Trate de recordar un problema que le sea familiar y tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- ¿Conoce algún teorema, o fórmula física, geométrica, etc. que le pueda ser útil en este problema?
- Si conoce algún problema relacionado al suyo y que antes haya resuelto, ¿podría usted utilizarlo?, ¿podría emplear su método?, ¿le haría falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- En base a lo anterior, ¿puede establecer la/s relación/es entre los datos y las incógnitas?
- Si no puede establecerlas, ¿podría enunciar el problema en otra forma?, ¿podría plantearlo en forma diferente nuevamente?
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver algún problema similar más accesible.
- ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición, descartando por el momento los otros datos. ¿Cómo la incógnita queda ahora determinada?, ¿puede llevar esto a una expresión matemática? Continúe ahora con otras partes del problema, de la misma manera.

- ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos?, ¿ha empleado toda la condición?, ¿ha considerado todas las nociones elementales concernientes al problema?

C) Ejecución Del Plan

- Resuelva las ecuaciones que se han planteado en la etapa anterior, o ejecute los pasos planeados (puede tratarse de métodos gráficos, uso de tablas, etc.)
- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno los pasos.
- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?, ¿puede verificarlo o demostrarlo?

D) Visión Retrospectiva.

- Examine e interprete la solución obtenida.
- ¿Puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede intuirlo o verlo de golpe, sin pasos intermedios?
- ¿Es el resultado numérico un valor razonable (en cuanto a magnitud, signo, etc.)?
- Finalmente: ¿puede emplear el resultado o el método en otro problema?

4.9.5. Respuestas

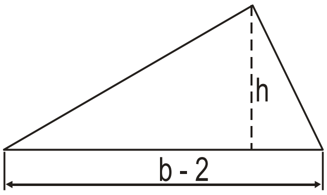
1) $x+5$
2) $2x+3$
3) $2(x+4)+3$
4) $x \, . \, y$
5) $2x+\frac{1}{2}y+7$
6) $(x+2).(y-3)$
7) $x \, . \, y=15$
8) $20-3x=8$
9) $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+\frac{1}{2}y=6 \end{cases}$
10) $x(x+1)=30$
11) $x+y=12$
12) $y=2x-3$
13) $x+y=198$
14) $10x$
15) $5y$
16) $10x+5y=1500$
17) $\begin{cases} 10x+5y=1500 \\ x=2y \end{cases}$
18) $y=2x$
19) $x \, . \, y=512$
20) $x+y$
21) $x=\frac{5}{9}x+320$
22) $x=\frac{5}{9}(x+320)$

23) $x+320$

24) $\begin{cases} 2x+y=180° \\ x=2y \end{cases}$

25) $\dfrac{b\ .\ h}{2}=25$

26)

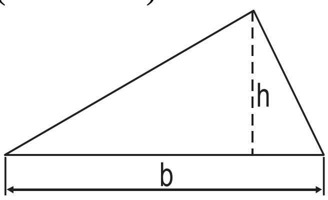


27) $Sb=\dfrac{(b-2).h}{2}$

28) $\dfrac{\left(b-2\right).h}{2}=20$

29) $\begin{cases} \dfrac{b\ .\ h}{2}=937,50 \\ b=3h \end{cases}$

30) Tiene tres incógnitas: ellas son:(GRÁFICO)



las cantidades de billetes de un (x), cinco (y) y diez (z) pesos.

31) $x+y+z=30$

32) $x=y+z$

33) $10z$

34) $5y$

35) x

36) $x+5y+10z=110$

37) Incógnitas: cantidad de billetes de uno (w), cinco(x), diez (y), y cincuenta (z) pesos.

$$\begin{cases} w+x+y+z=68 \\ z=w+4 \\ w+5x+10y+50z=1020 \\ y=z+4 \end{cases}$$

5

Trigonometría

Objetivos

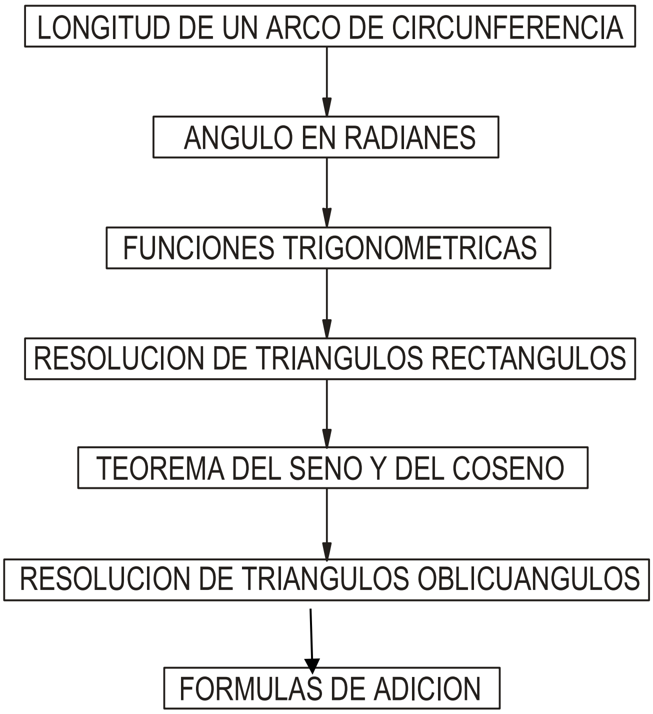
Al finalizar esta unidad usted deberá ser capaz de:

- Comprender el concepto de ángulo y su medición.
- Comprender el concepto de función trigonométrica.
- Definir y graficar las funciones trigonométricas.
- Resolver triángulos rectángulos.
- Comprender los teoremas del seno y del coseno.
- Resolver triángulos oblicuángulos.
- Comprender las fórmulas de adición.

Contenidos.

1. Longitud de un arco de circunferencia.
2. Ángulos y su medición.
3. Funciones trigonométricas.
4. Resolución de triángulos.
5. Formulas de adicción.

Esquema Conceptual



Introducción.
En esta unidad se considera la longitud de un arco de circunferencia. El concepto de ángulo y su medición en grados sexagesimales y en radianes. El concepto de función trigonométrica y la definición y estudio de las funciones trigonométricas. La resolución de triángulos rectángulos. Los teoremas del seno y del coseno y su aplicación en la resolución de triángulos oblicuángulos. Las fórmulas de adición.

Orientación del aprendizaje.
Lea la introducción teórica de cada tema y desarrolle personalmente los ejemplos que le siguen. Realice la ejercitación correspondiente.

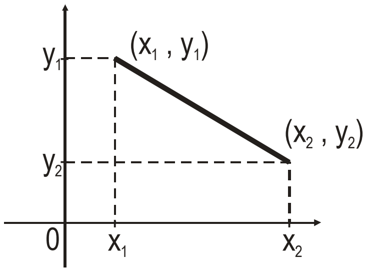
Bibliografía de la Unidad.

- Englebert, S., Pedemonti, S., Semino, S., "Matemática 3". AZ editorial.
- Tapia, N., Bibiloni, A., Tapia, C., "Matemática 3". Editorial Estrada.

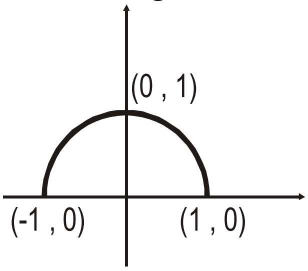
5.1. Longitud de un arco de circunferencia.

Dados dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) del plano, el teorema de Pitágoras nos da una fórmula para calcular la longitud del segmento que los une, esta es:

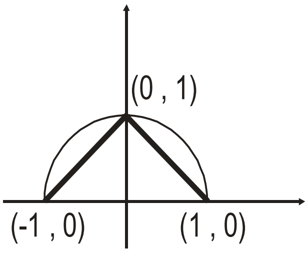
$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



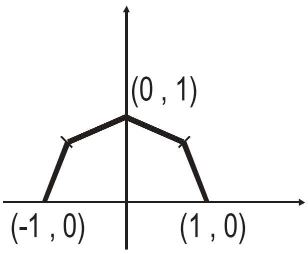
Supongamos ahora que queremos calcular la longitud de la semicircunferencia unidad:



La longitud del segmento que une los puntos (1,0) y (-1,0) (extremos de la semicircunferencia) es 2. Podemos tomar este valor como una primera aproximación a la longitud del arco.
Una mejor aproximación se obtiene si sumamos las longitudes de los segmentos entre (1,0) y (0,1) y entre (0,1) y (-1,0) y en este caso el valor $\in 2\sqrt{2} = 2{,}8284$. Gráficamente.



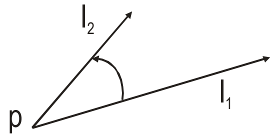
Si ahora subdividimos y calculamos la suma de las longitudes de los segmentos como en la figura que sigue



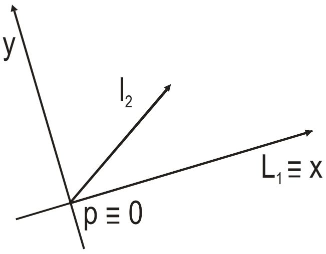
Obtenemos el valor 3,0614.
Subdividimos una vez más, obtenemos como resultado 3,1214.
Finalmente, notemos que subdividiendo en 16 segmentos de igual longitud se obtiene 3,1362 y con 32 segmentos el resultado 3,1407.
Si seguimos subdividiendo así, podemos calcular con tanta precisión como nos haga falta la longitud de la semicircunferencia unidad, cuyo valor correcto es un número real que se lo representa con la letra griega π.
Procediendo de la misma manera podemos calcular con tanta precisión como sea necesario, la longitud de cualquier arco de circunferencia dado.
Nota:
Quizá podría mencionarse que las aproximaciones son siempre por defecto, es decir, el valor calculado es menor que el exacto.

5.2. Ángulos y su Medición

Dar un ángulo consiste en dar un par de semirrectas con el mismo origen P: una l_1 que llamamos inicial y otra l_2 que llamaremos final.

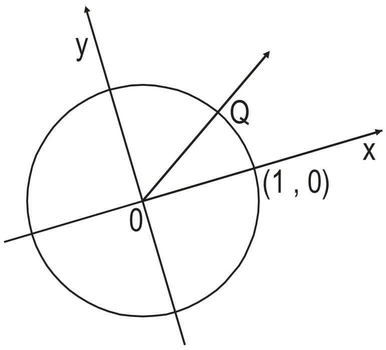


Para medir un ángulo como el dado, procedemos de la siguiente manera: introducimos en el plano un par de ejes cartesianos ortogonales de tal manera que el origen de coordenadas sea P y l_1 coincida con el eje positivo de las abscisas.



En tal sistema de coordenadas consideramos la circunferencia unidad, esto es, la circunferencia de centro “0” y radio “1”.

Entonces l_2 corta a la circunferencia unidad en un punto Q.



Se llama medida en radianes del ángulo dado a la longitud del arco de la circunferencia unidad que une el punto (1,0) con Q en el sentido antihorario.
En la figura anterior sería el arco “más corto” pero es fácil imaginar una figura donde sea el “más largo”.
Es también muy usada la medida en grados sexagesimal de un ángulo.
Esta se obtiene definiendo que un ángulo de 1 grado sexagesimal es aquél de $2\pi/360$ radianes.
En fórmulas:

$$1° = 2\pi/360 \text{ radianes}$$

Se define 1 minuto sexagesimal como (1/60)° y se escribe:

$$1' = (1/60)°$$

Finalmente, se usa definir 1 segundo sexagesimal como la sesenta ava parte de un minuto sexagesimal, lo que también escribimos:

$$1'' = (1/60)' - (1/3600)°$$

En este sentido entonces un ángulo que tiene a 3°12´36´´ por medida sexagesimal, corresponde a un ángulo de:

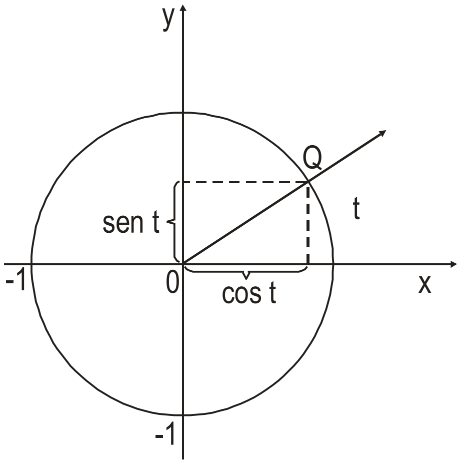
$$3\left(\frac{2\pi}{360}\right)+(12)\left(\frac{2\pi}{360}\right)\left(\frac{1}{60}\right)+(36)\left(\frac{2\pi}{360}\right)\left(\frac{1}{3600}\right)=2\pi\left(\frac{321}{36000}\right) \text{ radianes}$$

Análogamente, un ángulo de $\pi/4$ radianes es un ángulo que tiene 45° por medida sexagesimal.
A veces es conveniente pensar a un ángulo de, digamos, “t” radianes (con $t > 0$) como el ángulo que tiene por semirrecta inicial al eje positivo de las abscisas y por semirrecta final la semirrecta

por el origen y por el punto de circunferencia unidad al cual arribamos si "caminamos" sobre la circunferencia una distancia "t" a partir del punto (1,0) en el sentido antihorario.
De esta manera vemos que $t > 0$ no tiene porque ser menor que 2π. Podemos entonces pensar, por ejemplo, en un ángulo de $5\pi/2$ radianes como un ángulo de $\pi/2$ radianes.
Para pensar correspondientemente en un ángulo de "t" radianes con $t < 0$ seguimos tomando al eje positivo de las abscisas como semirrecta inicial y como semirrecta final la que empieza en el origen y pasa por el punto de la circunferencia unidad al cual arribamos caminando una distancia "t" a partir del punto (1,0) en el sentido horario.
Por ejemplo, pensamos en un ángulo de $-\pi/2$ radianes como en uno de $3\pi/2$ radianes.
Finalmente digamos que cuando se habla de un ángulo de 450°, uno piensa en un ángulo de (450-362)°=90°.

5.3. Funciones trigonométricas

Dado un número real "t" representamos, como en la sección anterior, un ángulo de "t" radianes en un sistema de coordenadas cartesianas.



Sea Q el punto de intersección de la semirrecta final de dicho ángulo con la circunferencia unidad (de radio unitario).
Las coordenadas "x" o "y" de Q dependen del ángulo "t". Llamaremos "coseno de t" a la primera coordenada y "seno de t" a la segunda coordenada; escribimos:

$$x = \cos t$$
$$y = \operatorname{sen} t$$

5.3.1. Funciones Seno y Coseno

El **coseno de "t"** es la abscisa del punto Q, el **seno de "t"** es la ordenada del punto Q.
Las funciones:

$$R \to R \;;\; t \mapsto \cos t$$
$$R \to R \;;\; t \mapsto sen\ t$$

se llaman, respectivamente, "coseno" y "seno".
Es consecuencia inmediata de las definiciones de coseno y seno, que **para todo número real "t"** se verifica:

$$I)\quad (sen\ t)^2 + (\cos\ t)^2 = 1$$

se suele escribir

$$sen^2\ t = (sen\ t)^2$$
$$\cos^2\ t = (\cos\ t)^2$$

Con esta notación la fórmula anterior se escribe:

$$\boxed{sen^2\ t + \cos^2\ t = 1}$$

$$II)\ \ sen(t+2\pi) = sen\ t$$
$$\cos(t+2\pi) = \cos t$$

$$III)\quad -1 \le \cos\ t \le 1$$
$$-1 \le sen\ t \le 1$$

Son también inmediatos los valores consignados en el siguiente cuadro:

t	Q	cos t	sen t
0	(1, 0)	1	0
$\pi/2$	(0, 1)	0	1
π	(-1, 0)	-1	0
$3\pi/2$	(0, -1)	0	-1

De la simple observación de la figura resulta:

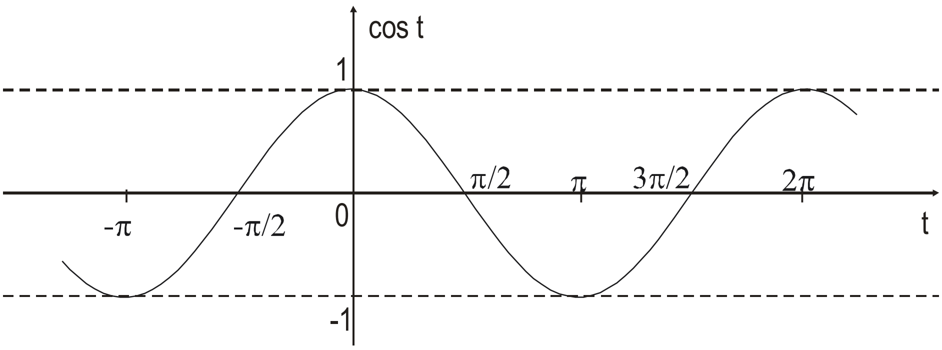
Si "t" crece de "0" a "$\pi/2$"

"sen t" crece de "0" a "1"; "cos t" decrece de "1" a "0".

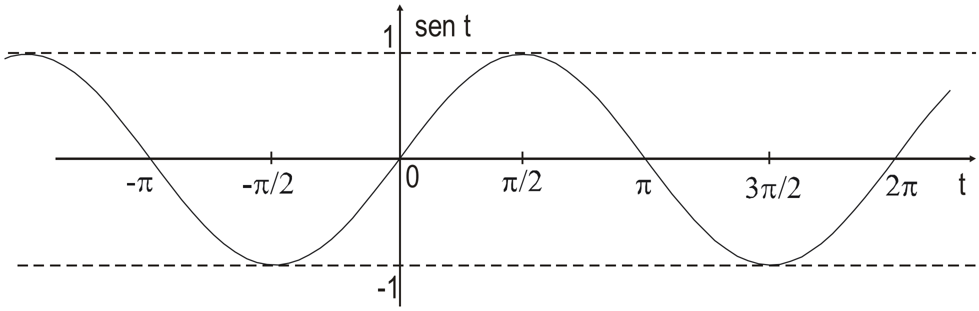
Si "t" crece d "$\pi/2$" a "π"

"sen t" decrece de "1" a "0"; "cos t" decrece de "0" a "-1", etc.

Estas observaciones muestran que la representación gráfica de la función "coseno" es de la forma:



Análogamente, la representación gráfica de la función seno es de la forma:



También se les llama funciones trigonométricas a las funciones con los reales como conjunto de llegada, que se define a continuación.

5.3.2. La Función Tangente

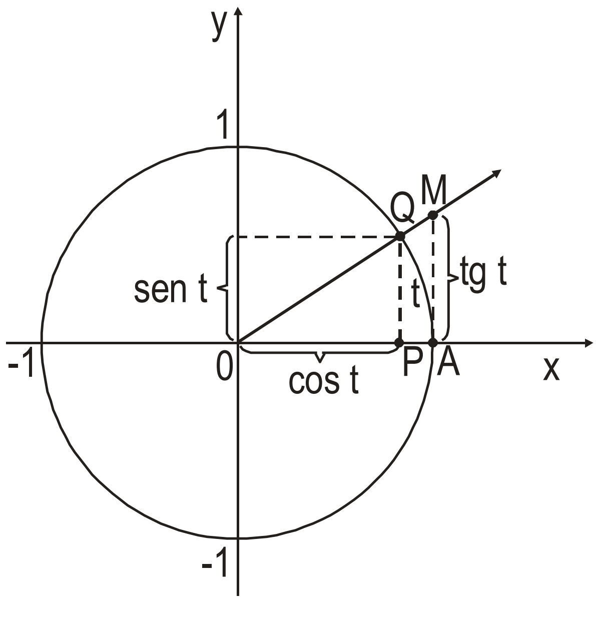
La función tangente, que denotamos “tg”, tiene como dominio al conjunto de los números reales excepto los múltiplos enteros impares de $\pi/2$, esto es, excepto... $-5\pi/2$, $-3\pi/2, -\pi/2,\ \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2$...

Su definición es:

$$tg\ t = \frac{sen\ t}{\cos\ t}$$

En su definición se ve que debemos eliminar del dominio a los múltiplos enteros impares de $\pi/2$ debido a que el denominador, que es el coseno, se anula en los mismos.

Para tener idea de su representación gráfica hacemos las siguientes observaciones:



Notación: Con $|AB|$ denotaremos la longitud del segmento de extremos A y B.

Los triángulos $0\overset{\vee}{P}Q$ y $0\overset{\vee}{A}M$ son semejantes ; por lo tanto:

$$\frac{|AM|}{|0A|} = \frac{|PQ|}{|0P|}$$

Puesto que:

$$|0A| = 1; \quad |0P| = \cos\ t; \quad |PQ| = sen\ t$$

resulta:

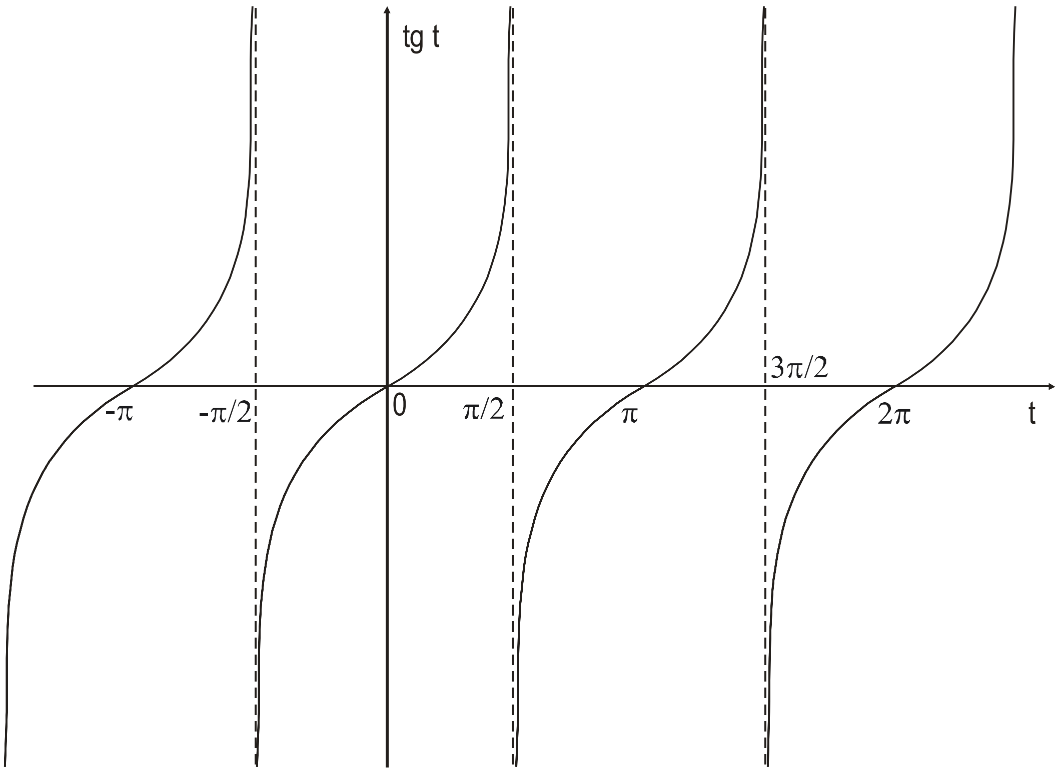
$$\frac{|AM|}{1} = \frac{sen\ t}{\cos\ t}$$

es decir que:

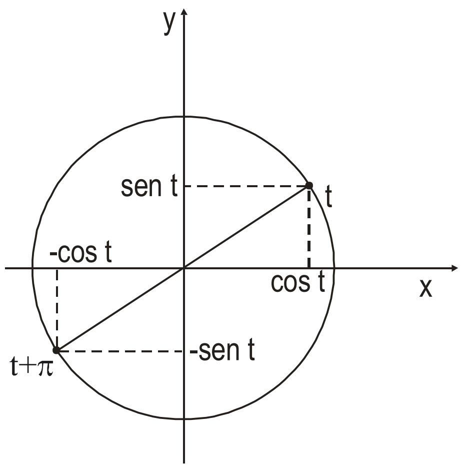
$$|AM| = tg\ t$$

o sea que la longitud del segmento de extremos A y M es el valor de la función tangente para el número real “t”.

Analizando la variación de $|AM|$ según la variación de “t” se deduce que la representación gráfica de la función tangente es de la forma:



Estudiando la figura



se ve que $\cos(t+\pi) = -\cos\ t$ y $sen(t+\pi) = -sen\ t$ de donde sigue que $tg(t+\pi) = tg\ t$, esto es, la tangente es una función periódica de período π, información que hemos usado para su gráfica.

5.3.3. La Función Cotangente

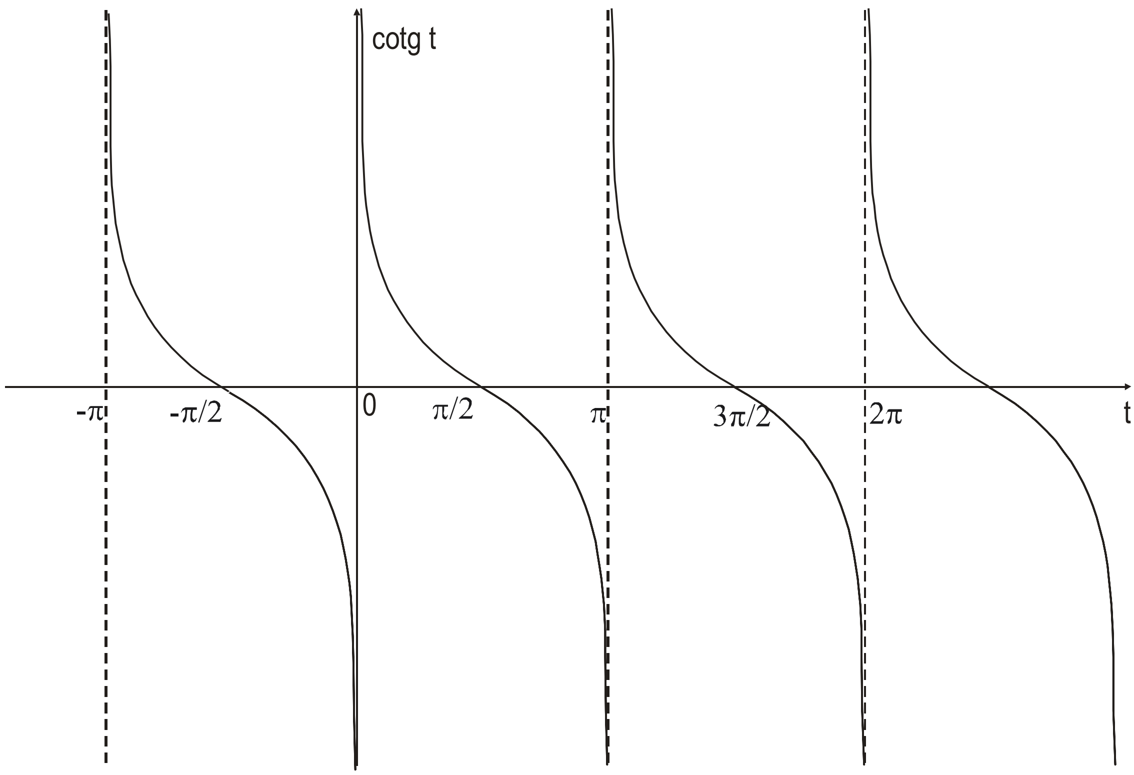
La función cotangente, denotada por "cotg", será está definida por:

$$\cot g\ t = \frac{\cos\ t}{sen\ t} = \frac{1}{tg\ t}$$

de donde sigue que debemos excluir del dominio a todos los múltiplos enteros de π, esto es,... $-3\pi,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,....$ debido a que en ellos se anula la función seno.

Por la misma razón que en el caso de la tg o, si se quiere, a consecuencia de ello, la función cotangente es periódica de período π, esto es, $\cot g\ t(t+\pi) = \cot g(t)$, cualquiera sea el "t" real para el cual está definida la cotangente.

Su gráfica aproximada es:



5.3.4. La Función Secante

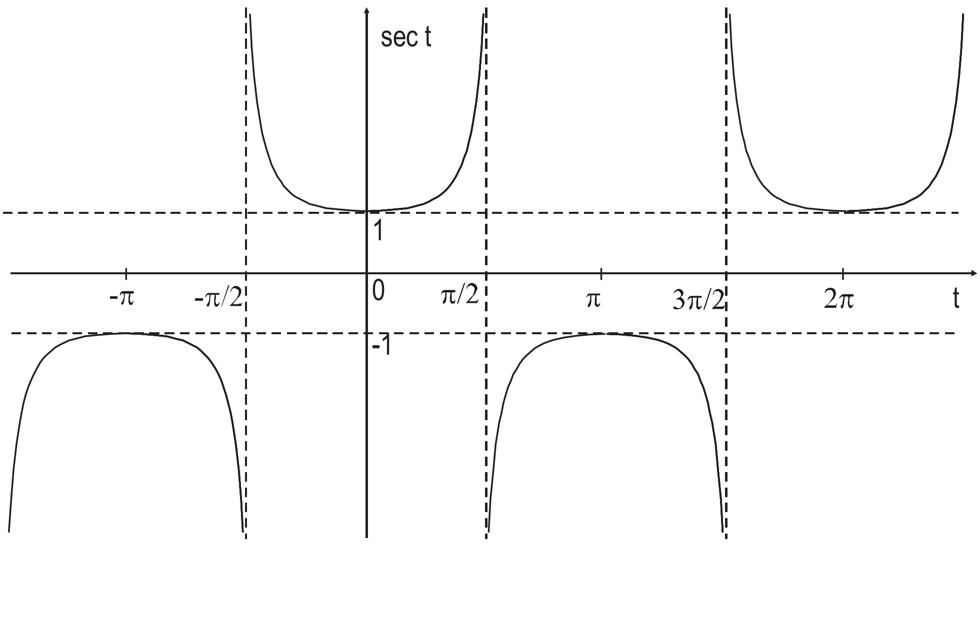
La función secante. Denotada por "sec" está definida por:

$$\sec\ t = \frac{1}{\cos\ t}$$

Por su definición, como en el caso de la tangente, debemos excluir de su dominio a los múltiplos enteros impares de $\pi/2$, esto es, a:

$$...-5\pi/2,\ -3\pi/2,\ -\pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2....$$

Su gráfica aproximada es como sigue

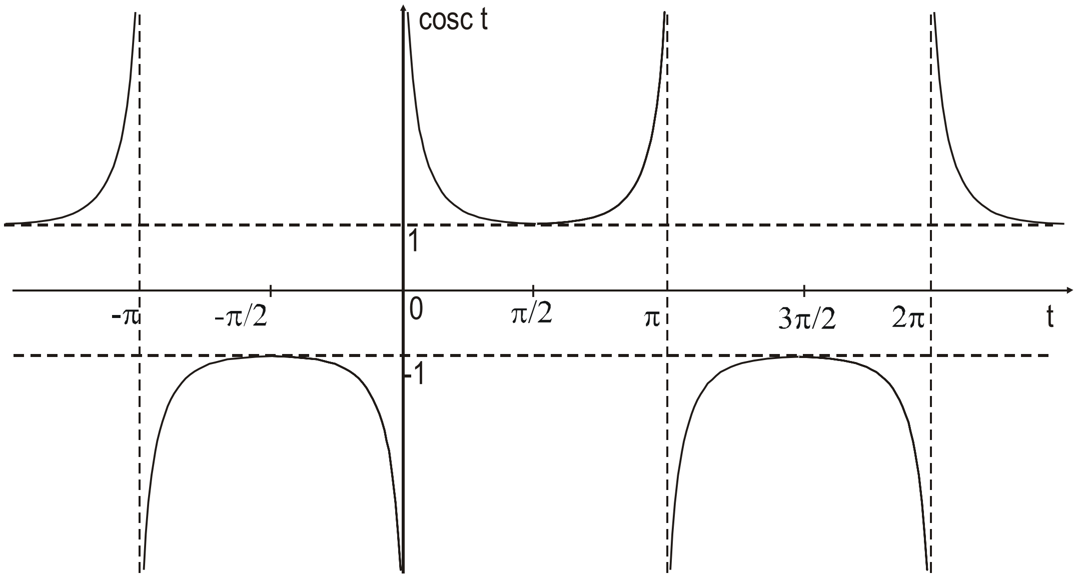


5.3.5. Función Cosecante

También se define la **función cosecante**, denotada "cosec", por medio de

$$\text{cosc } t = \frac{1}{sen\ t}$$

En este caso su gráfica aproximada es

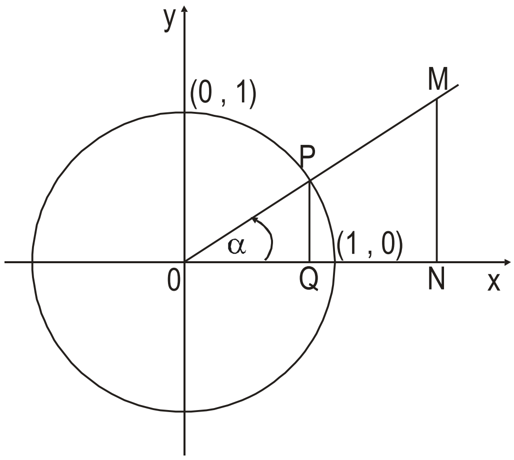


Las funciones: seno, coseno, tangente, cotang

ente, secante, cosecante, son las llamadas "funciones trigonométricas".

5.4. Resolución de triángulos

1) Mirando la figura



se ve que los triángulos $0\overset{\vee}{P}Q$ y $0\overset{\vee}{M}N$ son semejantes.

Dados dos puntos A y B del plano, denotemos con $|AB|$ la longitud del segmento comprendido entre ellos.

Entonces, por semejanza, tenemos que

$$\cos\ \alpha = |0Q| = \frac{|0Q|}{|0P|} = \frac{|0N|}{|0M|}$$

$$\text{sen}\ \alpha = |PQ| = \frac{|PQ|}{|0P|} = \frac{|MN|}{|0M|}$$

Estos dos hechos los expresamos diciendo que en un triángulo rectángulo, el coseno de uno de los ángulos (no recto) es el cociente entre las longitudes del cateto adyacente al ángulo en cuestión y la hipotenusa, y el seno es el cociente entre las longitudes del cateto opuesto y la hipotenusa.

Además, teniendo en cuenta las relaciones:

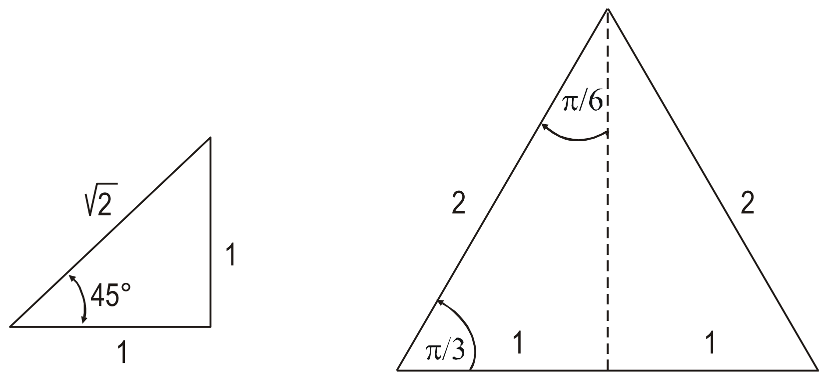
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} \qquad ; \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

$$\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} \qquad ; \qquad \text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

resulta también: la tangente de un ángulo es el cociente entre las longitudes del cateto opuesto y el cateto adyacente; la cotangente es el cociente entre las longitudes del cateto adyacente y el opuesto; etc.

2) Como aplicación calcularemos los valores de las figuras trigonométricas para algunos ángulos especiales: los de $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$ (ó sea 45°, 30° y 60°)

Ellos se obtienen de las figuras siguientes

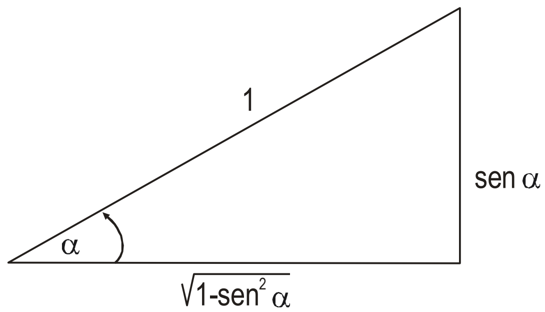


Resulta:

	0º $(0 rad)$	**30º** $\left(\pi/_6\, rad\right)$	**45º** $\left(\pi/_4\, rad\right)$	**60º** $\left(\pi/_3\, rad\right)$	**90º** $\left(\pi/_2\, rad\right)$
sen	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

3) Otra aplicación es: conociendo el valor de una de las funciones trigonométricas de un ángulo, calcular las demás.

Si se conoce “sen α”, la figura permite “leer” el valor de las restantes funciones

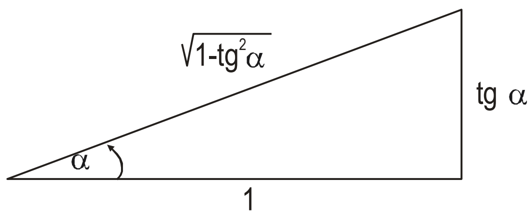


Resulta

$$\cos\ \alpha = \sqrt{1-sen^2\ \alpha} \qquad ; \qquad tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\sqrt{1-sen^2\ \alpha}}$$

etc.

Análogamente, si se conoce “tg α”, de la figura:

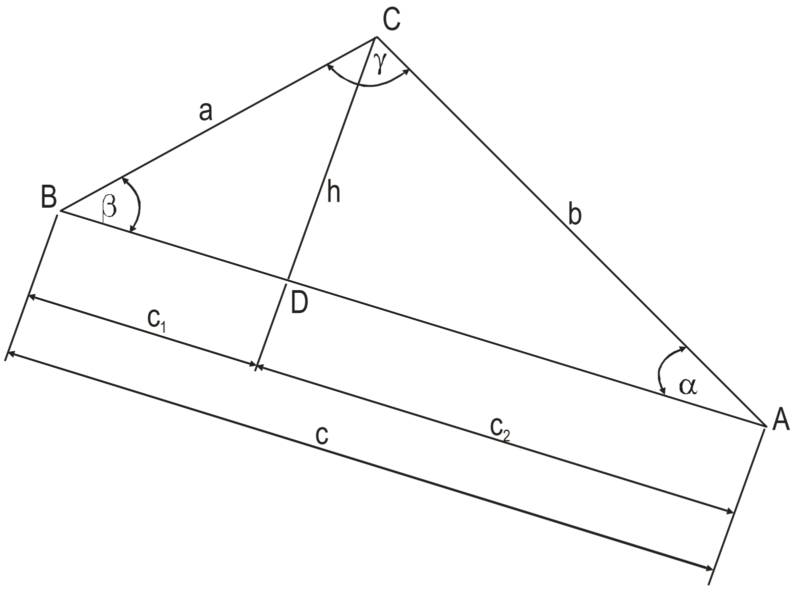


se obtiene:

$$sen\ \alpha = \frac{tg\ \alpha}{\sqrt{1+tg^2\ \alpha}} \qquad ; \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\ \alpha}}$$

etc.

4) Supongamos ahora dado un triángulo como el de la figura



El triángulo ABC no necesariamente es rectángulo, pero si lo son $B\check{C}D$ y $A\check{C}D$.

Digamos que:

$$h = |CD| \ , \ a = |BC| \ , \ b = |AC|,$$
$$c = |AB| \ , \ c_1 = |BD| \ , \ c_2 = |AD|$$

Entonces:

$$b^2 = h^2 + c_2^2 = h^2 + (c - c_1)^2 = h^2 + c_1^2 + c^2 - 2cc_1$$

Pero $h^2 + c_1^2 = a^2$ y $c_1 / a = \cos\ \beta$. Luego:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\ \beta}$$

Fórmula que, junto a sus correspondientes para “ a^2 ” y “ c^2 ” se las conoce con el nombre de **teorema del coseno** y que es una importante generalización del teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos.

5) Para finalizar ésta sección digamos que en la figura anterior se tiene

$$sen\ \alpha = \frac{h}{b} \qquad\qquad sen\ \beta = \frac{h}{a}$$

de donde sigue que:

$$b\ sen\ \alpha = h = a\ sen\ \beta$$

y de aquí que:

$$\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \beta}{b}$$

Como α y β eran arbitrarios, sigue que en cualquier triángulo

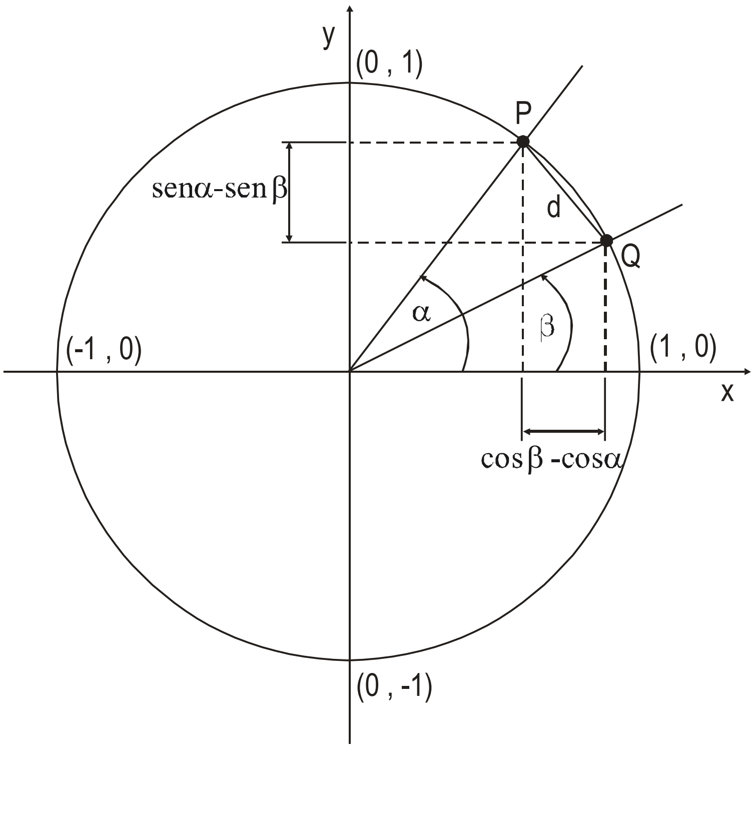
$$\boxed{\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \beta}{b} = \frac{sen\ \gamma}{c}}$$

Fórmula que se conoce con el nombre de **teorema del seno**.

5.5. Fórmulas de adición.

Usando el teorema del coseno se pueden deducir todas las fórmulas de adición para las funciones trigonométricas.

1) Supongamos tener ángulos como en la figura.



con $d = |PQ|$

Como:

$$P=(\cos\ \alpha, sen\ \alpha) \qquad ; \qquad Q=(\cos\ \beta, sen\ \beta)$$

se tiene, por una parte:

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos\ \beta-\cos\ \alpha)^2+(sen\ \alpha - sen\ \beta)^2 \\ &= (\cos^2\ \beta - 2\cos\ \alpha \cos\ \beta + \cos^2\ \alpha) + (sen^2\ \alpha - 2 sen\ \alpha\ sen\ \beta + sen^2 \beta) \end{aligned}$$

ó sea:

$$d^2 = 2-2\cos\ \alpha\ \cos\ \beta - 2 sen\ \alpha\ sen\ \beta \qquad (1).$$

Por otra parte, aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\vee}{0PQ}$ se tiene también:

$$d^2 = |OP|^2+|0Q|^2-2|0P||0Q|\ \cos(\alpha-\beta)$$

y, teniendo en cuenta que $|0P|=|0Q|=1$:

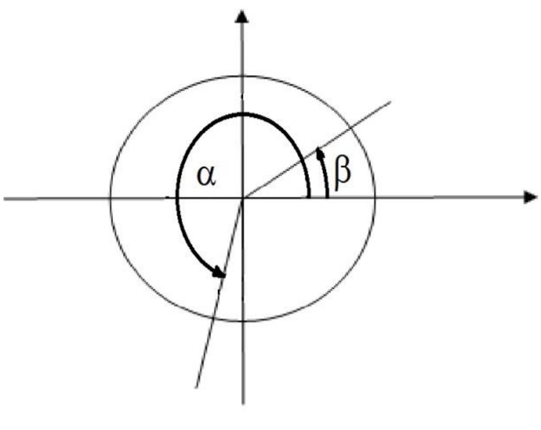
$$d^2 = 2-2\ \cos(\alpha-\beta) \qquad (2)$$

De la comparación de (1) y (2) resulta la fórmula:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\ \alpha\ \cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta \qquad (*)$$

Llamada "**fórmula de la diferencia para el coseno**"

Mostraremos que esta fórmula es también válida en el caso en que ($\alpha-\beta$) es un ángulo mayor que π como en la figura siguiente



Puesto que

$$\pi < \alpha-\beta < 2\pi$$

resulta

$$0 < \alpha-\beta-\pi < \pi$$

y la fórmula (*) es aplicable al ángulo:

$$\alpha - \beta - \pi = (\alpha - \beta) - \pi = \alpha - (\beta + \pi)$$

Por una parte:

$$\cos\left((\alpha-\beta)-\pi\right) = \cos(\alpha-\beta)\cos\ \pi + sen(\alpha-\beta)\, sen\ \pi$$

como: $\cos\ \pi = -1$; $sen\ \pi = 0$

$$\cos\left((\alpha-\beta)-\pi\right) = -\cos(\alpha-\beta) \qquad (1)$$

Por otra parte:

$$\cos\left(\alpha-(\beta+\pi)\right) = \cos\ \alpha\ \cos(\beta+\pi) + sen\ \alpha\ sen(\beta+\pi)$$

como: $\cos(\beta+\pi) = -\cos\ \beta$; $sen(\beta+\pi) = -sen\beta$

$$\cos\left(\alpha-(\beta+\pi)\right) = -\cos\ \alpha\ \cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta \qquad (2)$$

OBS: De la igualdad de (1) y (2) se obtiene nuevamente la fórmula (*)

2) Calcularemos ahora el **coseno de la suma** de dos ángulos “ α ” y “ β ”.

Escribimos: $\alpha+\beta = \alpha-(-\beta)$

Aplicando la fórmula de la diferencia resulta:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(-\beta)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\mathrm{sen}(-\beta) = -\mathrm{sen}(\beta);\ \cos(-\beta) = \cos(\beta)$$

se obtiene la “**fórmula de adición para el coseno**”

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

3) Aplicando la fórmula de la diferencia para el coseno a los ángulos

$$\frac{\pi}{2}-t \qquad ; \qquad t = \left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)$$

se obtiene las fórmulas que relacionan el seno y el coseno de un ángulo con el coseno y el seno del ángulo complementario.

$$\underline{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} = \cos\frac{\pi}{2}\cos\ t + sen\frac{\pi}{2}sen\ t = \underline{sen\ t}$$

$$\underline{\cos t} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \right)\right) = \underline{sen\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}$$

4) Usaremos los resultados del punto 3 para deducir la "**fórmula de adición para el seno**".

Ponemos:

$$sen(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$$

Resulta

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\ \beta + sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) sen\ \beta$$
$$= sen\ \alpha\ \cos\ \beta + \cos\ \alpha\ sen\ \beta$$

Por lo tanto

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\ \alpha\ \cos\ \beta + \cos\ \alpha\ sen\ \beta}$$

Poniendo:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

se obtiene también la "**fórmula de la diferencia para el seno**".

$$\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen\ \alpha\ \cos\ \beta - \cos\ \alpha\ sen\ \beta}$$

5) Es de destacar que en las fórmulas de adición del seno y del coseno quedan comprendidas todas las identidades usadas hasta ahora y otras nuevas.

Poniendo $\beta = \pi/2$ en la fórmula de adición para el seno, queda:

$$\underline{sen(\alpha + \pi/2) = +\cos\ \alpha} \text{ pues } sen\ \pi/2 = 1 \text{ y } \underline{\cos\ \pi/2 = 0}$$

Poniendo $\alpha = \beta$ en la fórmula de adición para el coseno, obtenemos:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \mathrm{sen}^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha)) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

lo que suele escribirse en la forma

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\ \alpha + 1)} \quad (5)$$

Análogamente, poniendo $\alpha = \beta$ en la fórmula de adición para el seno, se obtiene:

$$\boxed{sen 2\ \alpha = 2 sen\ \alpha\ \cos\ \alpha} \quad (6)$$

Las fórmulas (5) y (6) se llaman fórmulas de duplicación para el cos y sen respectivamente.

También suele usarse una fórmula similar para la tangente, que se deduce de las de adición para el seno y coseno, como sigue:

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{sen\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}=\frac{\cos\ \alpha\ sen\ \beta+sen\ \alpha\ \cos\ \beta}{\cos\ \alpha\ \cos\ \beta-sen\ \alpha\ sen\ \beta}$$

de donde, dividiendo numerador y denominador por $\cos\ \alpha\ \cos\ \beta$, obtenemos:

$$\boxed{tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\ \alpha+tg\ \beta}{1-tg\ \alpha\ tg\ \beta}}$$

fórmula que se llama **fórmula de adición para la tangente**.

Como en los casos anteriores podemos obtener fórmulas de duplicación haciendo $\alpha=\beta$ en la fórmula anterior. Se obtiene:

$$\boxed{tg\ 2\ \alpha=\frac{2tg\ \alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

5.6. Ejercitación de la Unidad 5

1. Expresar en radianes la medida de cada uno de los siguientes ángulos.

   a) 30º b) 45º c) 60º d) 90º e) 135º f) 180º

2. Expresar en grados sexagesimales la medida de cada uno de los siguientes ángulos:

   a) π/6 b) π/3 c) π/2 d) π/4 e) π f)2π

3. Calcular los valores de sen(θ) y cos(θ) para:

   a) θ=0 b) θ=π/6 c) θ=π/3 d) θ=π/2 e) θ=π f) θ=2π

   g) θ=-π/4 h) θ=-π/6

4. Dar todos los θ entre cero y 2 π tales que:

   $$\text{a)}sen\left(\theta\right)=-\sqrt{2}/2 \quad \text{b)}\cos\left(\theta\right)=\sqrt{3}/2 \quad \text{c)}\cos\left(\theta\right)=-1$$
   $$\text{d)}tg\left(\theta\right)=-\sqrt{3} \quad \text{e)}sen\left(\theta\right)=0 \quad \text{f)}sen\left(\theta\right)=-1$$

5. Sabiendo que $\text{sen}\left(\theta\right)=\frac{4}{5}$, calcular:

   $$\text{a)}sen\left(\pi-\theta\right) \quad \text{b)}sen\left(\pi+\theta\right) \quad \text{c)}sen\left(-\theta\right)$$

6. Si $\cos\left(\theta\right)=\frac{1}{4}$, calcular:

$$a)\cos(\pi-\theta) \quad b)\cos(\pi+\theta) \quad c)\cos(2\pi-\theta)$$

7. Si $tg(\theta) = -2$, calcular:

$$a) tg(\pi-\theta) \quad b) tg(\pi+\theta) \quad c) tg(-\theta)$$

8. Determinar el signo de $\cos(\theta)$, de $\operatorname{sen}(\theta)$ y de $\operatorname{tg}(\theta)$ para:

$$a) \theta \in (0, \pi/2) \quad b) \theta \in (\pi/2, \pi)$$
$$c) \theta \in (\pi, 3\pi/2) \quad d) \theta \in (3\pi/2, 2\pi)$$

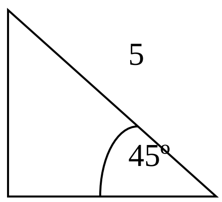
9. Sea $\theta \in [0, \pi/2]$, entonces:

   a) si sen(θ)=1/2, calcular cos(θ) y tg(θ)

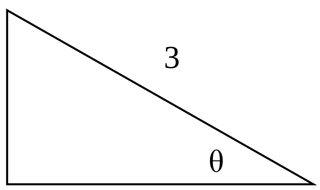
   b) si cos(θ)=1/2, calcular sen(θ) y tg(θ)

   c) si tg(θ)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular cos(θ) y sen(θ)

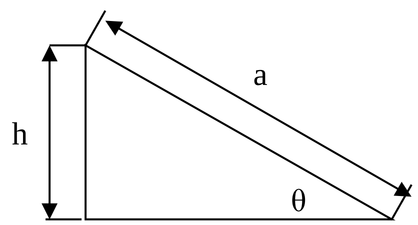
10. Calcular el área del triángulo rectángulo de la siguiente figura



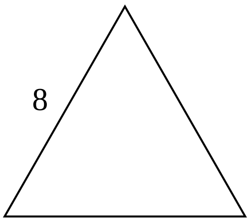
11. Calcular el área, el perímetro y los ángulos interiores del triángulo rectángulo de la siguiente figura sabiendo que θ=30º.



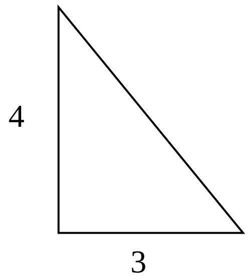
12. En el triángulo rectángulo de la figura calcular h y a, sabiendo que $cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



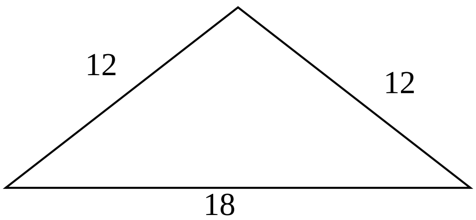
13. Calcular el área del triángulo equilátero.



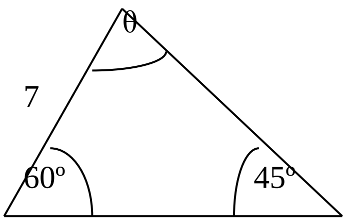
14. Calcular la hipotenusa y los ángulos interiores del siguiente triángulo rectángulo.



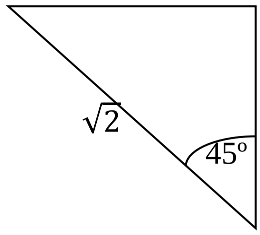
15. Calcular el área del triángulo de la siguiente figura.



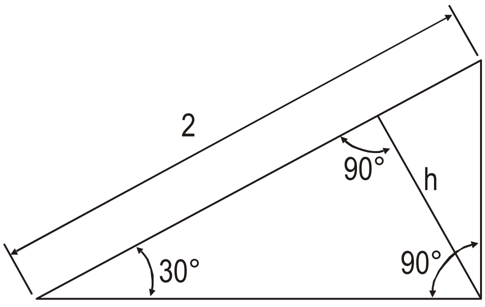
16. En el triángulo de la siguiente figura, calcular los otros dos lados y el ángulo θ.



17. Calcular el perímetro del triángulo rectángulo de la figura.



18. Calcular h.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

CICLO DE INTRODUCCIÓN A LOS ESTUDIOS UNIVERSITARIOS

ANEXO

GUÍA DE EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA

Autor: Ing. Esp. Pablo Bobatto

Unidad 1

1) El número 6,353535…. expresándolo como número fraccionario, su resultado es:

a) $6\frac{35}{90}$ b) $6\frac{3535}{9000}$ c) $\frac{629}{99}$ d) $\frac{629}{999}$ e) ninguna opción es correcta

2) El número $2{,}2\widehat{5}$ expresándolo como número fraccionario es:

a) $\frac{203}{90}$ b) ninguna es correcta c) $\frac{203}{99}$ d) $\frac{200}{99}$ e) $\frac{203}{900}$

3) Encuentre dos números cuya suma sea $\frac{1}{5}$ y cuyo producto sea $-\frac{6}{25}$

a) $x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}$ b) $x=-\frac{3}{5}, y=\frac{2}{5}$ c) $x=\frac{3}{5}, y=-\frac{2}{5}$ d) $x=\frac{3}{5}, y=-\frac{5}{2}$
e) ninguna opción es correcta

4) La expresión $\left(\frac{x^{24}}{y^{15}z^{-18}}\right)^{-2/3}$ es equivalente a:

a) $x^{-16}y^{-10}z^{12}$ b) $x^{16}y^{-10}z^{-12}$ c) $x^{-16}y^{10}z^{-12}$ d) $x^{16}y^{10}z^{12}$ e) ninguna es correcta

5) Resolver: $\dfrac{\left(\frac{1}{3}-1+\frac{5}{6}\right)^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}+\dfrac{\sqrt{\frac{64}{9}}}{\sqrt[3]{\frac{64}{27}}}$

a) 4 b)10 c) -4 d) -10 e) Ninguna de las anteriores

6) La expresión $\left(3-\sqrt{3}\right)^{2}$ es equivalente a:

a) 6 b) 12 c) $12+6\sqrt{3}$ d) $6\left(2-\sqrt{3}\right)$ e) ninguna opción es correcta

7) La expresión $\dfrac{\sqrt{a^{2}}\cdot\sqrt[4]{a^{-3}}}{a^{-1}\cdot\sqrt[5]{a^{4}}}$ se puede reducir a:

a) a^{2} b) $\sqrt[12]{a^{9}}$ c) $a^{20/9}$ d) $a^{-9/5}$ e) ninguna opción es correcta

8) La expresión $\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[2]{x^{3}}}{x^{1/4}\cdot\sqrt[3]{x^{5}}}=$ se puede reducir a:

a) $\frac{1}{\sqrt[12]{x}}$ b) $x^{\frac{1}{12}}$ c) $\left(\frac{1}{x^{1/6}}\right)^{-1}$ d) $\sqrt[12]{x}$ e) ninguna opción es correcta

9) El resultado de operar $0{,}\widehat{3}-\left\{-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}-\left(\frac{2}{9}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}-1\right)^{2}\right\}$ es:

a) $\frac{36}{29}$ b) $\frac{29}{36}$ c) $\frac{29}{9}$ d) $-\frac{36}{5}$ e) ninguna opción es correcta

10) Un alumno obtiene 8, 5 y 4 de calificaciones en sus tres primeras evaluaciones de Ingles. ¿Qué calificación debe obtener en la cuarta evaluación para que su promedio sea 6?

a) 4 b) 8 c) 9 d) 10 e) ninguna opción es correcta.

11) La expresión $\left(\frac{x^{18}}{y^{15}z^{-18}}\right)^{-2/3}$ es equivalente a:

a) $x^{12}y^{10}z^{12}$ b) $x^{12}y^{-10}z^{-12}$ c) $x^{-12}y^{10}z^{-12}$ d) $x^{-12}y^{-10}z^{12}$
e) ninguna opción es correcta

12) La expresión $\frac{(a^2-9)(a^2-3a)}{(a^2-2a)(a^2-6a+9)}=$ se simplifica en:

a) $\frac{a+3}{a-2}$ b) $\frac{a(a+3)}{a-2}$ c) 1 d) $\frac{a-3}{a-2}$ e) ninguna opción es correcta

13) La expresión $(4+\sqrt{5})^2$ se puede reducir a:

a) 21 b) 13 c) $21+8\sqrt{5}$ d) $21+9\sqrt{5}$ e) ninguna opción es correcta

14) La expresión $\frac{x^{-1}\cdot\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^{-3}}}$ se puede reducir a:

a) $x^{20/9}$ b) $x^{-9/5}$ c) x^2 d) $\sqrt[12]{x^9}$ e) ninguna opción es correcta

15) La expresión $\left(\frac{x^3y^{-4}}{x^{-2}z^{-2}}\right)^{-3/2}$ es equivalente a:

a) $\frac{x^{15/2}z^3}{y^6}$ b) $\frac{y^6}{x^{15/2}z^3}$ c) $x^{15/2}y^6z^{-3}$ d) $x^{-15/2}y^6z^{-3}$ e) ninguna es correcta

16) La expresión $(-\sqrt{3}+2)\cdot(-\sqrt{3}-2)$ se puede reducir a:

a) -1 b) 1 c) $-1-4\sqrt{3}$ d) $-1+4\sqrt{3}$ e) ninguna opción es correcta

17) La expresión $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^2}}$ se puede reducir a:

a) 1 b) $\sqrt[12]{a^{27}}$ c) $a^{12/19}$ d) $a^{12/27}$ e) ninguna opción es correcta

18) Resolver $\sqrt{\left(\frac{3}{2}-0.5\right)^2-\left(\sqrt{0.16}+0.2\right)^2}$

a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{5}{4}$ c) 1 d) $\frac{2}{3}$ e) ninguna opción es correcta

19) Resolver $\left(-2a^3\right)\cdot\left(-2a^2b^4\right)^3 =$

a) $-6a^{10}b^{12}$ b) $-24a^8b^{12}$ c) $-24a^4b^4$ d) $6a^8b^{12}$ e) ninguna opción es correcta

20) Resolver $\left[\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{36}{25}\right]\cdot 2+2\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)$

a) $\frac{62}{25}$ b) $\frac{61}{25}$ c) 1 d) $\frac{63}{25}$ e) ninguna opción es correcta

21) La expresión $\left(2-\sqrt{2}\right)^2$ se puede reducir a:

a) 2 b) 6 c) 0 d) $2\left(3-2\sqrt{2}\right)$ e) ninguna opción es correcta

22) La expresión $(2.i^{30} - 5.i^{24})^2$**:**(1-2i) da como resultado un número complejo cuya parte imaginaria es:

a) 3/5 b) -14/5 c) -7/5 d) 6/3 e) Ninguna es correcta

23) La expresión $\frac{-4i^5-3i^4+2}{-3i}$ se puede reducir a:

a) $\frac{4}{3}-\frac{5}{3}i$ b) $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}i$ c) $\frac{4}{3}+\frac{1}{3}i$ d) $\frac{4}{3}+\frac{5}{3}i$ e) ninguna opción es correcta

24) El resultado de operar $\left(2-i\right)^3 =$

a) $2+11i$ b) $2-11i$ c) $-2+11i$ d) $-2+11i$ e) ninguna opción es correcta

25) Resolver $\frac{-4-3i}{2i}$

a) $-\frac{9}{4}+2i$ b) $-\frac{3}{4}-2i$ c) $-\frac{4}{3}+2i$ d) $-\frac{3}{4}+2i$ e) ninguna opción es correcta

26) Resolver $\frac{-3-2i}{-4-5i}$

a) $\frac{22-7i}{41}$ b) $\frac{22+7i}{41}$ c) $\frac{22+7i}{-41i}$ d) $5+4i$ e) ninguna opción es correcta

27) Resolver: $\frac{\left(4-4i\right)^2}{\left(2-i\right)+\left(1-2i\right)} =$

a) 16-16i b) 8/3 + 8/3i c) -16/3 - 0i d) 16/3 + 0i e) Ninguna de las anteriores

28) Resolver: $\frac{i^{65}-i^{19}-5i^{28}}{-i^7+i^{39}-i^{31}} =$

a) 2 + 5i b) -2 - 5i c) (-2+5i)/3 d) (2-5i)/3 e) Ninguna de las anteriores

29) Resolver $\frac{-(-8+2i)}{-3i}$

a) $-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}i$ b) $-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}i$ c) $\frac{24}{9}+\frac{6}{9}i$ d) $\frac{2}{3}+\frac{8}{3}i$ e) ninguna opción es correcta

30) Resolver $\frac{-(2i-4)}{-4i}$

a) $-\frac{1}{2}-i$ b) $\frac{1}{2}+i$ c) $\frac{16i+8}{4}$ d) $-\frac{1}{2}+i$ e) ninguna opción es correcta

31) El número $1{,}30\overset{\frown}{6}$ expresándolo como número fraccionario, su resultado es:

a) $\frac{294}{225}$ b) $\frac{588}{425}$ c) $\frac{1306}{990}$ d) $\frac{1176}{990}$ e) ninguna opción es correcta

32) La expresión $\frac{-4i^3-2i^2+8}{-3-2i}$ se puede reducir a:

a) $\frac{-22+32i}{13}$ b) $\frac{22+32i}{13}$ c) $\frac{22+32i}{-5}$ d) $\frac{-38-8i}{13}$ e) ninguna es correcta

33) La expresión $\frac{\sqrt[3]{r^2}\cdot\sqrt{r^3}-2r^2\cdot\sqrt[6]{r}}{\sqrt[6]{r^{13}}}=$ se puede reducir a:

a) $-\sqrt{r}$ b) $r^{2/3}$ c) $\frac{r-1}{r}$ d) 2 e) ninguna opción es correcta

34) El resultado de operar $0{,}\overset{\frown}{2}-\left\{-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}-1\right)^{2}\right\}$ es:

a) $\frac{10}{9}$ b) $-\frac{10}{9}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $-\frac{2}{9}$ e) ninguna opción es correcta

35) La expresión $\frac{2\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{-1}\cdot x^2\cdot\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^2}\div\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^{-1}}=$ se puede reducir a:

a) $2\cdot x^{3/2}$ b) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ c) $2\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}$ d) 2 e) ninguna opción es correcta

36) Simplifique la siguiente expresión: $\frac{1+\frac{1}{x-2}}{1-\frac{1}{1+\frac{2}{x-4}}}$

a) $\frac{x-1}{4}$ b) $\frac{x+2}{2}$ c) $\frac{x-1}{2}$ d) $\frac{x-1}{x-2}$ e) Ninguna de las anteriores

37) Simplifique la siguiente expresión: $\dfrac{1-\dfrac{1}{x-2}}{1+\dfrac{1}{x-4}}$

a) $\frac{x+1}{2}$ b) $\frac{x-2}{x-4}$ c) $x-2$ d) 2 e) $\frac{x-4}{x-2}$

38) Resolver la siguiente ecuación con números complejos: $\dfrac{(1+i)^2(2-i)}{i^3}$

a) $-1+3i$ b) $-1+i$ c) 2 d) $-4+2i$ e) ninguna opción es correcta

39) Resolver la siguiente ecuación con números complejos: $\dfrac{(1-i)^2+(1+i)^2+2}{2-i}$

a) $2-i$ b) $2+i$ c) 2 d) 4 e) ninguna opción es correcta

Unidad 2

1) Calcular el cociente, C y el resto, R, que resulta de dividir $\left(x-2+x^3\right)\div\left(x-2\right)$

a) $C = x^2 - 2x + 5;\quad R = -12$ b) $C = x^2 + 2x + 5;\quad R = 12$
c) $C = x^2 + 2x + 5;\quad R = 8$ d) $C = x^2 + 2x + 5;\quad R = -8$
e) Ninguna de las anteriores

2) El valor de "k" para que el polinomio $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 9x + k$ sea divisible por (x-3) es:

a) 16 b) -16 c) 18 d) -18 e) Ninguna de las anteriores

3) El resto de dividir el polinomio: $P(x) = 2x^2 - 3x^3 - 1 + \frac{1}{2}x$ por $Q(x) = x - \frac{1}{3}$ es:

a) $R = -\frac{11}{18}$ b) $R = \frac{13}{18}$ c) $R = 0$ d) $R = -\frac{23}{18}$ e) Ninguna de las anteriores

4) Calcular el cociente, C y el resto, R, que resulta de dividir $\left(x-3+x^3\right)\div\left(x-3\right)$

a) $C = x^2 - 3x + 10;\quad R = 27$ b) $C = x^2 + 3x + 10;\quad R = 27$
c) $C = x^2 - 3x + 10;\quad R = -33$ d) $C = -x^2 - 3x + 10;\quad R = -33$
e) Ninguna de las anteriores

5) El polinomio p de grado 3, cuyas raíces son: 3 de multiplicidad dos y 0, y $p(-2) = 100$ es:
a) $p = -2x^3 + 12x^2 - 18x + 100$ b) $p = x^3 - 6x^2 + 9x$ c) $p = -2x^3 - 6x^2 + 9x$
d) $p = -2x^3 + 12x^2 - 18x$ e) ninguna opción es correcta

6) La expresión $\frac{\left(x^2-2x\right)\left(x^2-6x+9\right)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-3x\right)} =$ se simplifica en:

a) 1 b) $\frac{x-2}{x(x+3)}$ c) $\frac{x-2}{x+3}$ d) $\frac{x-2}{x-3}$ e) Ninguna de las anteriores

7) La cantidad de raíces reales de la función polinomial $2x^3 - 4x^2 - 6x$ es:

a) sólo dos b) sólo una c) ninguna d) tres e) ninguna opción es correcta

8) Factorizar por completo el polinomio $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 6x - 6$, sabiendo que $P(-1) = 0$.
a) $P(x) = 3(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ b) $P(x) = 3(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
c) $P(x) = 3(x-1)(x-2)(x+2)$ d) $P(x) = 3(x+1)(x-2)(x+2)$
e) Ninguna opción es correcta.

9) La expresión $\frac{\left(x-3\right)\left(x^2-4x+4\right)}{\left(x-2\right)\left(x^2-9\right)} =$ se simplifica en:
a) $\frac{x-4}{x-2}$ b) $x-2$ c) $\frac{x-2}{x-3}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) ninguna opción es correcta

10) Si P(x) es una función polinomial de grado 3 con raíces -1; 2 con $P(-3)=0$ y $P(0)=-6$ entonces:

a) $P(1)=-6$ b) $P(1)=-7$ c) $P(1)=-9$ d) $P(1)=-8$ e) ninguna opción es correcta

11) Al dividir el polinomio $P=-5+2x^4-3x^3-2x$ por el polinomio $Q=x^2-1$ el resto es:

a) $-5x+3$ b) $5x-3$ c) $-5x-3$ d) $5x+3$ e)Ninguna de las anteriores.

12) La expresión $\left(\frac{a-b}{\left(a^2-2ab+b^2\right)}\cdot\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)^{-1/2}$ se puede reducir a:

a) $\frac{1}{a+b}$ b) $(a-b)^{-1}$ c) $a-b$ d) 0 e) 1

13) Encontrar el polinomio de 4° grado tal que: P (–3) = 0 , P (3) = 0 y "2" es raíz doble ; con a_4 = -1 coeficiente del término de mayor grado.

a) $P=-x^4+4x^3+5x^2-36x+36$ b) $P=x^4-4x^3-5x^2-36x-36$
c) $P=-x^4-4x^3-5x^2+9x-36$ d) $P=-x^4-4x^3-5x^2+9x+36$
e) ninguna es correcta

14) La expresión $\frac{a^4-z^4}{a-z}\cdot\frac{a+z}{a^2+z^2}=$ se puede reducir a:

a) $-\frac{a}{(a-z)(a-z)}$ b)0 c) $a(a-z)^2$ d) $(a+z)^2$ e) ninguna opción es correcta

15) El polinomio p de grado 3, cuyas raíces son 1 de multiplicidad dos y 0, y $p(-1)=8$ es:
a) $p=2x^3+4x^2-2x+1$ b) $p=-2x^3+4x^2-2x+1$ c) $p=2x^3+4x^2-2x$
d) $p=-2x^3+4x^2-2x+8$ e) ninguna opción es correcta

16) La función polinomial x^3-3x^2+2x puede ser factorizada como:

a) $x(x+1)(x-2)$ b) $x(x-1)(x-2)$ c) $(x+1)(x-2)$
d) $x(x-3)(x+2)$ e) ninguna opción es correcta

17) El polinomio $P(x)=2x^2+4x+2$ factorizado es:
a) $P(x)=(x+1)^2$ b) $P(x)=(x-1)^2$ c) $P(x)=2(x-1)^2$
d) $P(x)=(x-2)(x+1)$ e) ninguna opción es correcta

18) Si P(x) es una función polinomial de grado 3 con raíces -5; 2 y 4 y P(0)=-120 entonces:

a) $P(1)=18$ b) $P(1)=-54$ c) $P(1)=0$ d) $P(1)=-120$ e) ninguna opción es correcta

19) El cociente de la división del polinomio: $3x^5 - 2x^4 + 4x^2 + 5x^3 + x - 2$ por $x^3 - x^2 + 1$ es:

a) $3x^2 + x + 6$ b) $3x^2 - 5x + 10$ c) $-3x^2 + x + 6$

d) $-3x^2 - x - 6$ e) ninguna opción es correcta

20) El polinomio p de grado 3, cuyas raíces son 2 de multiplicidad dos y 0, y $p(-2) = 32$ es:

a) $p = -2x^3 + 4x^2 - 4x + 1$ b) $p = -2x^3 + 4x^2 - 4x$ c) $p = -x^3 + 4x^2 - 4x$

d) $p = -2x^3 + 4x^2 - 4x + 32$ e) ninguna opción es correcta

21) Si P(x) es una función polinomial de segundo grado tal que $P(-7) = P(3) = 0$ y $P(0) = -42$, entonces $P(4)$ es igual a:

a) 22 b) 11 c) 21 d) -11 e) ninguna opción es correcta

22) La cantidad de raíces reales que tiene la función polinomial $x^3 + x^2 + 2x$

a) solo dos b) solo una c) ninguna d) exactamente tres e) ninguna es correcta

23) Sea el polinomio $P = ax^2 + 4x + 2$ tal que $P(2) = 0$ entonces su coeficiente principal vale:

a) $a = \frac{5}{2}$ b) $a = -\frac{5}{2}$ c) $a = -\frac{2}{5}$ d) $a = \frac{2}{5}$ e) ninguna opción es correcta

24) Al dividir el polinomio $P = -3 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x$ por el polinomio $Q = x^2 - 2$ el resto es:

a) $9x - 11$ b) $9x + 11$ c) $-9x - 11$ d) $-9x + 11$ e)Ninguna de las anteriores.

25) La expresión: $1 + \frac{1}{4a + 4b} - \frac{(a-b)}{4a^2 - 4b^2}$ se puede reducir a:

a) 1 b) $1 + \frac{3}{4(a-b)}$ c) $\frac{2}{(a+b)}$ d) $\frac{4a + 4b - 3}{4(a+b)}$ e) ninguna opción es correcta

26) Si P(x) es una función polinomial de grado 3 con raíces -2; 3 con $P(-4) = 0$ y $P(0) = -48$ entonces:

a) $P(-1) = 30$ b) $P(-1) = 120$ c) $P(-1) = 40$ d) $P(-1) = 57$ e) ninguna es correcta

27) Encontrar el polinomio de 4° grado tal que: P (–2) = 0 ; P (2) = 0 y “–3” es raíz doble ; con $a_4 = -1$.

a) $P = -x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 24x + 36$ b) $P = x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 24x - 36$

c) $P = -x^4 - 6x^3 - 13x^2 + 24x + 36$ d) $P = x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 24x - 36$

e) ninguna es correcta

28) Al dividir el polinomio $P(x) = 24 - 6x - 7x^2 - 3x^3 - 2x^4$ por el polinomio $Q(x) = x+2$ el resto es:

a)–2 b) –1 c) 0 d) 1 e)Ninguna de las anteriores.

29) Encontrar el polinomio de 4° grado tal que: P (–3) = 0 ; P (2) = 0 y "–1" es raíz doble ; con $a_4 = 1$.

a) $P(x) = x^4 + 1$ b) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ c) $P(x) = -x^4 - 3x^2 + 2x + 1$
d) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$ e) Ninguna de las anteriores

30) El valor de "k" para que el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + k$ sea divisible por (x+2) es:

a) –6 b) +3 c) 5 d) 6 e) Ninguna de las anteriores

31) Determine el polinomio de 3º grado cuyas raíces son: 0;-1;1 y el coeficiente principal es -2.

a) $-2x^3 + x^2 + x$ b) $2x^3 + x^2 - 2x$ c) $-2x^3 + -2x^2 - 2x$
d) $2x^3 - 2x$ e) ninguna opción es correcta

32) El resultado de dividir el polinomio: $2x + 4x^2 + 2x^3$ por $2x^2 - 2x$ es:

a) $x-3$ b) $x-6$ c) $x+6$ d) $x+3$ e) ninguna opción es correcta

33) Sean los polinomios: $P = (x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x - 4)$ y $Q = (x^2 - 2)$.
¿Cuál es el cociente de hacer la división *P/Q*?

a) $x^3 + 2x^2 + x - 5$ b) $x^3 + 2x^2 - x + 6$ c) $-x^3 - 3x^2 - x - 6$
d) $x^3 + 2x^2 - x + 3$ e) $-x + 6$

34) Indique todos los ceros del polinomio: $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ sabiendo que un cero es 2:

a) 0, 2, -2, 3 b)0, 1, -1, 2 c)0, 2, -2, 1 d)0, 2, -2, -1 e)ninguna es correcta

35) La siguiente expresión algebraica: $\dfrac{\dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x-3}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-3}}$ es equivalente a:

a) $-(x-2)$ b) $-2x-4$ c)4(x-2) d) $-2(x-2)$ e)ninguna de las anteriores

36) La expresión $\sqrt{\dfrac{x-y}{(x-y)^2} \cdot \dfrac{x+y}{x^2-y^2}}$ se puede reducir a:

a) $y-x$ b) $x+y$ c) $(x-y)^{-1}$ d) $\dfrac{1}{x+y}$ e) ninguna opción es correcta

37) Determine la mínima expresión a la que se puede llevar la siguiente ecuación:

$$\frac{\dfrac{(x^3-8)\cdot(x^4-16)}{(x^2+4)\cdot(2-x)}}{(x^2-4)} + \sqrt{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a \cdot b}} =$$

a) $x^2 + 2x + 2$ b) $(-x^2 - x)a$ c) $-x^2 - 2x - 2$ d) $(-2x-2)ab$ e) $-x^2 - 2x + 2$

38) Sean los polinomios: $P=\left(X^4-2X^3-3X^2+2X+2\right)$ y $Q=\left(X^2-2X-2\right)$

¿Cuál es el cociente de hacer la división *P/Q*?

a) 1 b) $-x^2$ c) 6 . d) x^2-1 e) x^2

39) Indique todos los ceros del polinomio: $x^4+6x^3+13x^2+12x+4$ sabiendo que un cero es -1:

a) $-1;-1;-2;-2$ b) $-1;-1;-2;+2$ c) $-1;-1;2;2$ d) $-1;1;-2;-2$ e) $-1;-1;2;-2$

40) La siguiente expresión algebraica: $\dfrac{a+\dfrac{2a}{a-1}}{a-\dfrac{2a}{a+1}}$, es equivalente a:

a) 1 b) a+1 c) a d) $\dfrac{(a+1)^2}{(a-1)^2}$ e) $\dfrac{(a-1)^2}{(a+1)^2}$

41) Sean los polinomios: $P=\left(X^4-2X^3-3X^2+2X+4\right)$ $Q=\left(X^3-2X-2\right)$

¿Cuál es el resto de hacer la división *P/Q*?

a) $x+2$ b) $-x^2$ c) $x-2$ d) (x^2-1) e) $(x-1)$

42) Calcule todos los ceros de: $x^4+x^3-3x^2-x+2$, sabiendo que un cero es 1

a) $1;-1;-1;-2$ b) $1;-1;-2;+2$ c) $1;1;-1;-2$ d) $1;-1;-1;-2$ e) $1;-1;2;2$

43) Sean los polinomios: $P=\left(X^4-X^3+5X^2+58X-18\right)$, $Q=\left(X^2+3X-1\right)$

¿Cuál es el resto de hacer la división *P/Q*?

a) 0 b) 2 c) 6 d) (x^2-1) e) $(x-1)$

44) Encontrar el valor de *k* para que una raíz del polinomio: x^3+2x^2-x-k, sea $x=-2$

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 0

45) Encontrar el valor de *k* para que una raíz del polinomio: x^3+x^2-x+k, sea $x=1$

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 0

46) Calcule el valor de k en el siguiente polinomio: $x^4+x^3-3x^2-x+k$, sabiendo que un cero es 1

a) 2 b) 0 c) -2 d) 1 e) -1

47) Encontrar el valor de *k* para que una raíz del polinomio: x^3+2x^2-x+k, sea $x=1$

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 0

Unidad 3

1) Halle la ecuación de la recta que tiene la misma ordenada al origen que la de $3x-5y+4=0$ y cuya pendiente es el doble de la de 2x-3y=0.

   a) $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{4}$ b) $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{5}$ c) $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{4}$

   d) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{4}$ e) ninguna opción es correcta

2) Las coordenadas del vértice de la parábola cuya función es: $y=\frac{1}{2}x^2+6x+35$

   a) $V=(-6;-17)$ b) $V=(6;17)$ c) $V=(17;-6)$

   d) $V=(-6;17)$ e) ninguna es correcta

3) Si una parábola tiene vértice en (4;7) y corta al eje de las x en (5;0) entonces también corta al eje de las x en el punto:

   a) (3;0) b)(0;0) c)(6;0) d)(-5;0) e)ninguna es correcta

4) El gráfico de la función lineal que pasa por el punto (1,2) y tiene pendiente -1/2 también pasa por:

   a) (2;1) b)(7;-1) c)(-4;-1/2) d)(7;5) e)ninguna es correcta

5) La ecuación de la parábola que tiene raíces en 2 y -1, y pasa por el punto (0;4) es:

   a) $y=-2x^2+2x+4$ b)$y=2x^2-6x+4$ c)$y=-2x^2-2x+4$
   d)$y=2x^2-6x-4$ e)Ninguna es correcta

6) La expresión canónica de $y=-2x^2-3x+5$ es:

   a) $y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{5}$ b) $y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-5$ c) $y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{8}{31}$

   d) $y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{8}{31}$ e) ninguna opción es correcta

7) La parábola $y=-(x-5)^2+8$, tiene como ordenada al origen:

   a) 17 b) 8 c) -25 d) -17 e) ninguna opción es correcta

8) La recta que pasa por los puntos (-1;-3) y (-4;-7) tiene ecuación:

   a) $y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$ b) $y=x-1$ c) $y=x+1$ d) $y=\frac{4}{3}x-\frac{13}{3}$

   e) ninguna opción es correcta

9) La recta que pasa por $A=\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ y $B=\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$ tiene pendiente:

   a) $m=\frac{2}{5}$ b) $m=-\frac{7}{5}$ c) $m=\frac{1}{5}$ d) $m=-\frac{1}{5}$ e) ninguna opción es correcta

10) La recta con pendiente negativa, que es diagonal al cuadrado definido por los puntos: (2,2); (2,6); (6,2) y (6,6) es:

a) $y = x + 2$ b) $y = -x + 2$ c) $y = -x + 8$ d) $y = -2x + 8$
e) ninguna respuesta es correcta.

11) La expresión canónica de $y = 2x^2 - 6x + 4$ es:

a) $y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 4$ b) $y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4$ c) $y = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 4$

d) $y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4$ e) ninguna opción es correcta

12) La parábola $y = -(x-4)^2 - 3$, tiene como ordenada al origen:

a) -19 b) 16 c) -16 d) -3 e) ninguna opción es correcta

13) La recta que pasa por los puntos (-1;-2) y (-4;-5) tiene ecuación:

a) $y = \frac{7}{5}x - \frac{17}{5}$ b) $y = -x - 1$ c) $y = x - 1$ d) $y = \frac{7}{5}x + \frac{17}{5}$
e) ninguna opción es correcta

14) La recta que pasa por $A = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right)$ y $B = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ tiene pendiente:

a) $m = 6$ b) $m = -6$ c) $m = \frac{1}{2}$ d) $m = -\frac{1}{2}$ e) ninguna opción es correcta

15) Dar la parábola que contiene a los puntos: (1,2); (3,2); $\left(2+\sqrt{2};3\right); \left(2-\sqrt{2};3\right)$. Ayuda: el coeficiente principal es “a=1”.

a) $y = x^2 + 2x - 5$ b) $y = x^2 - 4x - 5$ c) $y = x^2 - 4x + 5$
d) $y = x^2 - 2x - 5$ e) ninguna respuesta es correcta.

16) Dada la recta por $y = -12x + \frac{11}{37}$; la recta paralela a ella y que pasa por el punto $(-3;4)$ es:

a) $y = 12x + 32$ b) $y = -12x + 32$ c) $y = -12x - 6$
d) $y = -12x + 6$ e) Ninguna de las anteriores

17) La parábola de ecuación $y = 5(x+1)^2 + k$ que corta el eje y en el punto $(0,8)$ es:

a) $y = 8x^2 - 10x + 1$ b) $y = 5x^2 - 10x + 8$ c) $y = 5x^2 + 10x - 8$
d) $y = 5x^2 - 10x - 8$ e) ninguna opción es correcta.

18) La expresión canónica de $y = 3x^2 - 6x + 5$ es:

a) $y = -3(x-1)^2 + 2$ b) $y = 3(x-1)^2 + 2$ c) $y = 3(x+1)^2 + 2$
d) $y = 3(x-1)^2 - 2$ d) ninguna opción es correcta

19) La parábola $y=(x-3)^2-2$, tiene como ordenada al origen:

a) 9 b) 2 c) 11 d) -9 e) ninguna opción es correcta

20) La parábola de vértice (-1;2) que pasa por (0;3) tiene ecuación:

a) $y=x^2+2x+3$ b) $y=x^2+2x+5$ c) $y=3x^2+2x+3$ d) $y=x^2-2x+3$
e) ninguna opción es correcta

21) La recta que pasa por $A=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ y $B=\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$ tiene pendiente:

a) $m=6$ b) $m=\frac{1}{3}$ c) $m=\frac{1}{12}$ d) $m=\frac{1}{2}$ e) ninguna opción es correcta

22) Hallar la ecuación de la recta paralela a $3x-2y=6$ que pase por el origen (0;0). La misma tiene ecuación:

a) $y=-\frac{3}{2}x$ b) $2x-3y=0$ c) $y=-\frac{3}{2}x-2$ d) $y=\frac{2}{3}x+2$
e) Ninguna opción es correcta

23) La parábola $y=a(x-h)^2+2$ tiene eje de simetría $x=-\frac{3}{2}$ y pasa por el punto $(1,1)$, entonces:

a) $a=\frac{4}{9}$ b) $a=-\frac{9}{4}$ c) $a=\frac{9}{4}$ d) $a=-\frac{4}{9}$ e) ninguna de opciones es correcta

24) Sea la recta definida por la función $y=-6+2x$ es paralela a la recta de ecuación

a) $y+2x=-3$ b) $y+2x=3$ c) $y-2x=-3$ d) $y-3=-4$ e) ninguna es correcta

25) Encuentre el valor máximo de la función $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+2$

a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{11}{4}$ d) $-\frac{4}{9}$ e) ninguna de opciones es correcta

26) La recta que pasa por los puntos (0;-3) y (2;1) tiene ecuación:

a) $y=\frac{1}{2}x-3$ b) $y=2x$ c) $y=2x-3$ d) $y=-x-3$
e) ninguna opción es correcta

27) Los puntos de intersección de la recta dada por Y= –1/4 x+1 con los ejes coordenados “X” e “Y” son:

a) (1;0) , (4;0) b) (–1;0) , (–4;0) c) (0;1) , (–4;0)
d) (0;1) , (4;0) e) Ninguna de las anteriores

28) Sea la parábola $y=-3x^2-2x+4$ indique la opción correcta:

a) no corta al eje de abscisas b) el vértice es $\left(\frac{13}{3};-\frac{1}{3}\right)$

c) el eje de simetría es $x=-\frac{1}{3}$ d) el vértice es $\left(\frac{3}{8};-\frac{5}{4}\right)$

e) ninguna opción es incorrecta

29) La recta que pasa por los puntos (1;-3) y (-2;1) tiene ecuación:

a) $y=4x-3$ b) $y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$ c) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

d) $y=-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$ e) ninguna opción es correcta

30) Las coordenadas del vértice de la parábola de ecuación $y=x^2+4x-2$ es:

a) $V=(1;3)$ b) $V=(-1;-5)$ c) $V=(1;-2)$

d) $V=(-1;-3)$ e) ninguna opción es correcta

31) El punto $(a;-48)$ pertenece a la recta que pasa por los puntos $(0;0)$ y $(1;3)$ si:

a) $a=16$ b) $a=1/16$ c) $a=-1/16$ d) $a=-51$ e) ninguna opción es correcta

32) Si el vértice de la parábola $y=x^2+bx$ es $(1;y_v)$ entonces:

a) $b=2; y_v=0$ b) $b=-1/2; y_v=1/2$ c) $b=-2; y_v=2$

d) $b=-2; y_v=-1$ e) ninguna afirmación es correcta

33) La recta que pasa por los puntos $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{3}\right)$ y $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ tiene pendiente:

a) $m=\frac{5}{4}$ b) $m=-\frac{5}{4}$ c) $m=\frac{4}{5}$ d) $m=-\frac{4}{5}$ e) ninguna opción es correcta

34) Encuentre la ecuación de la recta que es paralela a $y=-\frac{5}{2}x-\frac{15}{3}$, y que pasa por el punto $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

a) $y-\frac{5}{2}=-\frac{7}{3}x$ b) $y=-\frac{7}{3}x+\frac{5}{2}$ c) $y+\frac{7}{3}x-\frac{29}{36}=0$

d) $y-\frac{7}{3}x=\frac{54}{23}$ e) todas las afirmaciones son falsas

35) La parábola $y=3\cdot(x-a)(x-5)$ tiene eje de simetría la ecuación $x=\frac{17}{6}$. Entonces:

a) $a=2/9$ b) $a=1/3$ c) $a=2/3$ d) $a=-3/2$ e) ninguna opción es correcta

36) Si una parábola pasa por el punto $\left(1;\frac{1}{5}\right)$ y tiene como vértice $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ entonces su representación es:

a) $y=-\frac{8}{15}x^2+\frac{8}{15}x+\frac{1}{5}$ b) $y=\frac{8}{15}x^2+\frac{8}{15}x+\frac{1}{5}$ c) $y=-\frac{8}{15}x^2-\frac{8}{15}x+\frac{1}{5}$
d) $y=-\frac{8}{15}x^2+\frac{8}{15}x-\frac{1}{5}$ e) Ninguna de las anteriores

37) Halle la ecuación de la recta que tiene la misma ordenada al origen que la de $x-2y+3=0$ y cuya pendiente es el doble de la de $x-2y+1=0$

a) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$ b) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ c) $y=2x+\frac{3}{2}$
d) $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ e) ninguna opción es correcta.

38) Sean A={1,2,3,4,7,9}; B={2,3,4,6,8} y C={3,4,5,6}. Hallar $(A\cup B)-C$

a) {1,2,7,8} b) {1,2,7,8,9} c) {3,4,5,6} d) { } e) Ninguna opción es correcta

39) El vértice de la parábola $y=(x-3)^2-6$, es el punto:

a) (-3;-6) b) (-3;6) c)(3;6) d) (3;-6) e) ninguna opción es correcta

40) Las coordenadas del vértice de la parábola cuya función es: $y-x^2-2x=3$

a) $V=(1;-3)$ b) $V=(-1;4)$ c) Ninguna opción es correcta
d) $V=(-1;-3)$ e) $V=(-1;-4)$

41) La recta de pendiente 2 que corta a la recta $y=5x$ en el punto de abscisa $x=1/2$ es:

a) $y=2x+\frac{3}{2}$ b) $y=2x+\frac{1}{2}$ c) $y=5x+\frac{3}{2}$
d) $y=2x-\frac{3}{2}$ e) ninguna opción es correcta

42) ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$

a) $m=-1/2$ b) $m=1/2$ c) $m=-2$ d) $m=2$ e) ninguna opción es correcta

43) ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-3;2)$ y $(4;-5)$

a) $m=1$ b) $m=7/5$ c) $m=-7/5$ d) $m=-1$ e) ninguna opción es correcta

44) ¿Qué cuadrante NO es atravesado por el gráfico de $y=-\frac{1}{2}x+1$?

a) 1º cuadrante b) 2º cuadrante c) 3º cuadrante
d) 4º cuadrante e) ninguna opción es correcta

45) ¿Qué cuadrante NO es atravesado por el gráfico de $y=-2(x-2)^2+3$?

a) 1º cuadrante b) 2º cuadrante c) 3º cuadrante
d) 4º cuadrante e) ninguna opción es correcta

46) Un puente colgante tiene una configuración parabólica en sus cables principales, las coordenadas del vértice son (0,-25) y una de las abscisas al origen es (60,0). ¿Cuál es la ecuación de la parábola?

a) $y=5/12x^2-25$ b) $y= -5/12x^2+25$ c) $y=5/12x^2+x+25$
d) $y=5/72x^2-25$ e) ninguna es correcta.

47) Dada la función $y=-2(x+1)^2$ sus características son:

a) ramas ascendentes con dos raíces reales e iguales y corta al eje de ordenadas en un valor positivo
b) ramas ascendentes con dos raíces reales distintas y corta al eje positivo de ordenadas
c) ramas descendentes con dos raíces reales e iguales con ordenada al origen positiva
d) ramas descendentes con dos raíces reales distintas y corta al eje positivo de ordenadas
e) ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

48) Sean los siguientes conjuntos:
A = {Números Reales < 0}
B = {Números Enteros < 0}
C = {Números Naturales}
Calcular: $A\bigcap(B\bigcap C)$

a) A b) C c) B d) $\varnothing$ e) ninguna opción es correcta

49) Sean los siguientes conjuntos:
A = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, π, 4, 5, 6}
B = {Números Enteros > 0}
C = {Números Naturales}
Calcular: $A\bigcap(B\bigcap C)$

a) {1, 2, 3, 4, 5, 6} b) C c) B d) $\varnothing$ e) ninguna opción es correcta

50) Sean los siguientes conjuntos de números:
A = {Números Reales}
B = {Números Enteros Positivos.}
C = {Números Naturales}
Calcular: $A\bigcap(B\bigcap C)$

a) A b) B+C c) B d) C e) A+B+C

Unidad 4

1) Si f(x) = ax+b verifica f(-3)=8 y f(3)=4, entonces:

a) a=2; b=-2 b)a=4; b=-8 c)a=-2; b=2 d)a=-4; b=20 e)ninguna es correcta

2) El gráfico de f(x)=2/x corta a la recta de ecuación y=x+1 en los puntos de abscisa:

a) -1 y 0 b)-2 y 0 c)1 y -2 d)1 y 0 e)Ninguna es correcta

3) Si la mitad de un número más un tercio de otro número es igual a 2 y además la suma de ambos números es 5. ¿Cuáles son esos números?

a)2 y 3 b) -2y 7 c)-2y-3 d)1y4 e) ninguna opción es correcta

4) Resolver: $\frac{(x+8)}{(x+2)}=\frac{9}{x(x+2)}$

a) $x_{1=}1$; $x_{2=}-2$ b) $x_{1=}-1$; $x_{2=}-9$ c) $x_{1=}1$; $x_{2=}-9$
d) $x_{1=}-1$; $x_{2=}9$ e) Ninguna es correcta

5) Sea el sistema $\begin{cases} 10x-5y=55 \\ 2x-y=-11 \end{cases}$, tiene como solución:

a) Tiene infinitas soluciones. b) No tiene solución. c) La solución es (0 ; 11)
d) La solución es (-11/2 ; 0) e) La solución es (0 ; -11)

6) La ecuación $\frac{a-1}{4}-\frac{a-5}{36}=\frac{a+5}{9}$ es satisfecha por:

a) $a=4$ b) $a=5$ c) $a=6$ d) $a=-5$ e) ninguna opción es correcta

7) La ecuación $6(a-3)=-4(3-a)-6a$ es satisfecha por:

a) $a=-\frac{3}{4}$ b) $a=\frac{3}{4}$ c) $a=1$ d) $a=\frac{6}{15}$ e) ninguna opción es correcta

8) El siguiente sistema: $\begin{cases} y=2x^2-8 \\ y=4x-2 \end{cases}$ tiene por soluciones:

a) P=(-1,0), Q=(3,0) b) P=(1,2), Q=(-3,-14) c) P=(-1,-6), Q=(3,10)
d) P=Q=(-1,-6) e) Ninguna opción es correcta.

9) La solución analítica del sistema $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+2y=-3 \end{cases}$ es:

a) $x=1, y=-3$ b) $x=-1, y=-3$ c) $x=2, y=-3$
d) $x=1, y=3$ e) ninguna opción es correcta

10) La ecuación $\sqrt{-3x+10}-1=x-1$ es satisfecha por:

a) ningún número real b) $x=1$ c) $x=-1; x=\frac{1}{2}$

d) $x=2$ e) ninguna opción es correcta

11) Analizando el discriminante de $y=30x^2-40x+10$ se deduce que:

a) las raíces son reales e iguales b)las raíces son reales y distintas
c) las raíces son complejas conjugadas d) las raíces son imaginarias puras
e) todas las afirmaciones son falsas

12) Un rectángulo tiene un perímetro de 26m y un área de 36m^2. Si los lados son x e y, calcular las dimensiones.

a) $x=4, y=5$ b) $x=4, y=6$ c) $x=3, y=7$ d) $x=4, y=8$
e) ninguna opción es correcta

13) La ecuación $-4x-3=\frac{5}{x}+6$ es satisfecha por:

a) $x=0; x=6$ b) $x=2; x=-\frac{1}{6}$ c) $x=2$

d) ningún número real e) ninguna opción es correcta

14) La ecuación $4\sqrt{3x-2}+8=-2x$ es satisfecha por:

a) ningún número real b) $x=-1; x=-2$ c) $x=1; x=2$ d) $x=1; x=0$
e) ninguna opción es correcta

15) Un rectángulo tiene un perímetro de 16m y un área de 15m^2. Si los lados son x e y, calcular las dimensiones.

a) $x=4, y=5$ b) $x=3, y=5$ c) $x=3, y=7$ d) $x=4, y=8$
e) ninguna opción es correcta

16) La solución analítica del sistema $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 6y-6x=1 \end{cases}$ es:

a) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$ b) $x=-\frac{1}{2}, y=\frac{2}{3}$ c) $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{2}{3}$

d) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{2}{3}$ e) ninguna opción es correcta

17) La ecuación $-3(x-5)+x=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}x\right)$ es satisfecha por:

a) $x=\frac{19}{124}$ b) $x=\frac{172}{19}$ c) $x=\frac{124}{7}$ d) $x=\frac{125}{19}$ e) ninguna opción es correcta

18) La solución del siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y = \frac{2}{5}x + 3 \\ y = \frac{2}{3}x + 4 \end{cases}$ es:

a) $\left(-\frac{15}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ b) $\left(-\frac{15}{4}; \frac{2}{3}\right)$ c) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{15}{4}\right)$

d) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{15}{4}\right)$ e) ninguna opción es correcta

19) La base (B) de un rectángulo es el doble que su altura (H). ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30cm?

a) $B = \frac{30}{3}, H = \frac{15}{3}$ b) $B = \frac{4}{3}, H = \frac{2}{3}$ c) $B = \frac{10}{3}, H = \frac{5}{3}$

d) $B = \frac{8}{3}, H = \frac{4}{3}$ e) ninguna opción es correcta

20) Resuelva la siguiente ecuación: $\frac{x+4}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{4x-2}{x^2-4}$

a) $x = -\frac{5}{3}$ b) $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{2}$ c) $x = -2$ d) $x_1 = 2; x_2 = -2$ e) ninguna es correcta

21) La ecuación $6x - 7 = \frac{2}{x} + 4$ es satisfecha por:

a) Ningún número real b) $x = 2$ y $x = -1/6$ c) $x = 0$ y $x = 2$

d) únicamente por $x = 2$ e) ninguna afirmación es correcta

22) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 5 \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$

a) $\left(\frac{11}{2}; \frac{53}{2}\right)$ b) $\left(\frac{11}{2}; -\frac{53}{4}\right)$ c) $\left(-\frac{11}{2}; \frac{53}{4}\right)$

d) $\left(-\frac{11}{2}; -\frac{53}{2}\right)$ e) ninguna opción es correcta

23) La ecuación $2(x-3) + x = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}x\right)$ es satisfecha por:

a) $x = \frac{19}{7}$ b) $x = \frac{172}{21}$ c) $x = \frac{51}{7}$ d) $x = \frac{57}{11}$ e) ninguna opción es correcta

24) La ecuación $3(x-9) + x = \frac{1}{3}(x-3)$ es satisfecha por:

a) $x = 1$ b) $x = 11/78$ c) $x = 3/4$ d) $x = -78/11$ e) ninguna opción es correcta

25) Las intersecciones de las siguientes rectas I) Y=2x–4 II) Y= –x+5 es el punto de coordenadas:

a) (2; 3) b) (–2; 3) c) (3; 2) d) (–3; 2) e) Ninguna de las anteriores

26) Una persona recibe una herencia que utiliza de la siguiente forma: 1/3 de ella lo destina a comprar un automóvil, con el 20% del resto paga sus deudas y lo que queda, $27000, lo deposita a plazo fijo en un banco. ¿Cuál es el monto de la herencia?

a) $50625 b) $43505 c) $36850 d) $64500 e) ninguna opción es correcta

27) Halle los dos números positivos cuya diferencia sea 5 y su producto 24.

a) 10 y 5 b) 12 y 7 c) 8 y 13 d) 3 y 8 e) Ninguna de las anteriores

28) La ecuación $a+5+\frac{3}{a}=4+\frac{9}{a}$ es satisfecha por:

a) ninguna opción es correcta b) $a=-5\frac{1}{2}; a=4\frac{1}{2}$ c) ningún número real

d) $a=2; a=3$ e) $a=2; a=-3$

29) Indicar cuál/es son los valores de *x* que verifican la siguiente expresión
$$\left(\frac{2}{x-2}\right)+\left(\frac{3}{x+2}\right)=\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}\right)$$

a) 4 y 1 b) -4 y 0 c) 4 y 2 d) 2 y 4 e) 4, 3

30) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+4y=-1 \\ 3x-2y=-3 \end{cases}$, ¿cuáles de los pares siguientes es solución?

a) $(x;y)=(1;3)$ b) $(x;y)=(0;-1)$ c) $(x;y)=(3;-1)$

d) $(x;y)=(-1;0)$ e) $(x;y)=(0;0)$

31) Indicar el punto de intersección de las siguientes rectas: $\begin{array}{l} r_1: 3x-y=20 \\ r_2: y-x+6=0 \end{array}$

a) $(-3;\frac{-11}{2})$ b) $(3;\frac{11}{2})$ c) (7, 1) d) $(1;7)$ e) $(\frac{-3}{2};\frac{11}{2})$

32) Calcular x en la siguiente expresión: $\frac{x-3}{2}-\frac{(x-2)^2}{2x}+\frac{3}{2}=0$

a) $x=0$ b) $x=1$ c) $x=\frac{3}{4}$ d) $x=-1$ e) Ninguna de las anteriores

33) Encontrar la intersección de las siguientes rectas: $\begin{cases} r_1: 3x-y=6 \\ r_2: -x-y=-2 \end{cases}$

a) $(1;2)$ b) $(-1;-6)$ c) $(0;2)$ d) $(2;0)$ e)Ninguna opciones es correcta

34) Sea el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x - 2y = -6 \end{cases}$ Su solución es:

a) $(5;1)$ b) $(1;5)$ c) $(5;-1)$ d) $(1;2)$ e) ninguna opción es correcta

35) Luego de 10 partidos sin perder, un equipo tiene 22 puntos. Si por cada partido ganado le otorgan 3 puntos y por cada partido empatado, un punto; ¿Cuántos partidos ganó y cuántos empató?

a) G = 7; E = 8 b) G = 6; E = 4 c) G = 5; E = 5
d) G = 17; E = 5 e) G = 7; E = 3

36) Indicar el punto de intersección de las siguientes rectas: $y = 3x + 2$
$3y - x + 6 = 0$

a) $(-3;\frac{-11}{2})$ b) $(3;\frac{11}{2})$ c) $(\frac{-9}{2};\frac{31}{2})$ d) $(\frac{-3}{2};\frac{-11}{2})$
e) Ninguna de las opciones anteriores

37) Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

a) C=32; P=26 b) P=30; C=28 c) P=32; C=26
d) P=22; C=36 e) P=132; C=36

38) Dos automóviles A y B hacen un mismo trayecto de 572 km. El automóvil A lleva recorridos $\frac{5}{11}$ del trayecto cuando el B ha recorrido $\frac{6}{13}$ del mismo. ¿Cuántos kilómetros más lleva recorridos el que va adelante?

a) 15 Km b) 260 Km c) 264 Km d) 4 Km e) 60 Km

39) Sea el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 4x - y = 9 \\ -2x + 6y = 12 \end{cases}$ Sus soluciones son:

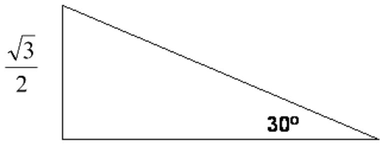
$(5;1)$ b) $(1;5)$ c) $(-3;3)$ d) $(3;3)$ e) $(5;-1)$

40) Indicar el punto de intersección de las siguientes rectas: $r_1 = 2x + 3$
$r_2 = -3x + 2$

a) $(-\frac{1}{5};\frac{13}{5})$ b) $(3;1)$ c) $(\frac{-3}{2};\frac{1}{2})$ d) $(0,-1)$ e) Ninguno de los anteriores

Unidad 5

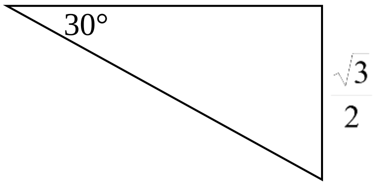
1) El perímetro del triángulo rectángulo de la figura es:



a) $P = -\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ b) $P = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}\right)$ c) $P = \frac{3}{2}+\left(\sqrt{3}+1\right)$

d) $P = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ e) ninguna opción es correcta

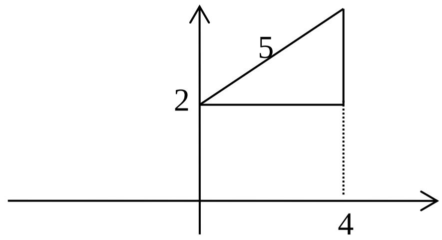
2) El área del triángulo rectángulo de la figura es:



a) $A = 8\sqrt{3}\sqrt{2}$ b) $A = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ c) $A = \frac{3}{8}\sqrt{3}$

d) $A = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}\right)$ e) ninguna opción es correcta

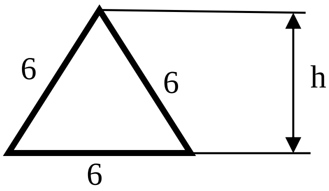
3) Hallar la ecuación de la recta que pasa formando la hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura:



a) $y = \frac{4}{5}x+2$ b) $y = 2x+4$ c) $y = \frac{3}{4}x+2$

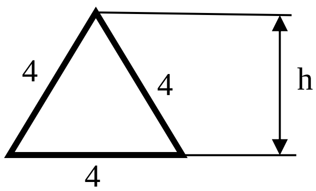
d) $y = \frac{2}{5}x+2$ e) Ninguna opción es correcta.

4) Calcular la altura "h" del triángulo de la figura



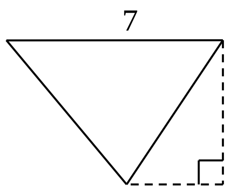
a) $h = 3\sqrt{3}$ b) $h = 3\sqrt{2}$ c) $h = 2\sqrt{2}$ d) $h = 2\sqrt{3}$ e) ninguna opción es correcta

5) Calcular la altura "h" del triángulo de la figura



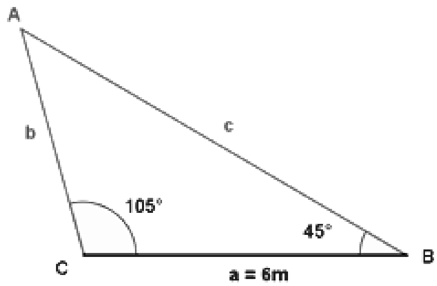
a) $h = 4$ b) $h = 16$ c) $h = 2\sqrt{2}$ d) $h = 2\sqrt{3}$ e) ninguna opción es correcta

6) ¿Cuál es el área del triángulo equilátero de figura?



a) $\frac{2}{7}\sqrt{3}$ b)49/2 c) $\frac{7}{6}\sqrt{3}$ d) $49\sqrt{3}$ e) ninguna es correcta

7) De un triángulo sabemos que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Calcular el lado b.



a) b=6 $\sqrt{2}$ b) b=12 $\sqrt{2}$ c) b=3 $\sqrt{2}$ d) b=4 $\sqrt{2}$ e) Ninguna de las anteriores

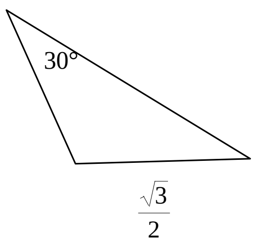
8) Si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos es de 45º y uno de sus catetos es de 8cm. Su perímetro (P) y área (A) es:

a) $P = 8\left(1+\sqrt{2}\right)cm; A = 32cm^2$ b) $P = 16\left(\sqrt{2}+1\right)cm; A = 64cm^2$

c) $P = 32cm; A = 64cm^2$ d) $P = 8\left(2+\sqrt{2}\right)cm; A = 32cm^2$

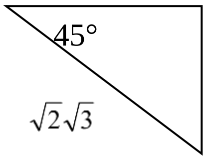
e) Ninguna de las anteriores

9) El área del triángulo isósceles de la figura es:



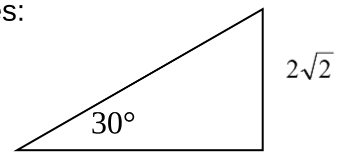
a) $A = \sqrt{3}$ b) $A = 4$ c) $A = 2\sqrt{3}$ d) $A = 3\sqrt{3}$ e) ninguna opción es correcta

10) El área del triangulo rectángulo de la figura es:



a) $A=\frac{3}{2}$ b) $A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $A=4\sqrt{3}$ d) $A=\frac{8}{3}$ e) ninguna opción es correcta

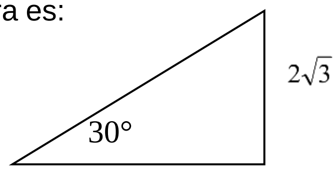
11) El perímetro del triangulo rectángulo de la figura es:



a) $P=7\sqrt{2}$ b) $P=2\left(\sqrt{6}+4\sqrt{2}\right)$ c) $P=\sqrt{2}\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $P=2\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ e) ninguna opción es correcta

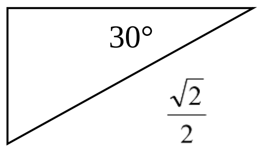
12) El perímetro del triangulo rectángulo de la figura es:



a) $P=6\sqrt{3}$ b) $P=6\left(2+\sqrt{3}\right)$ c) $P=2\sqrt{6}+6\sqrt{3}$

d) $P=2\left(\sqrt{6}+3\sqrt{3}\right)$ e) ninguna opción es correcta

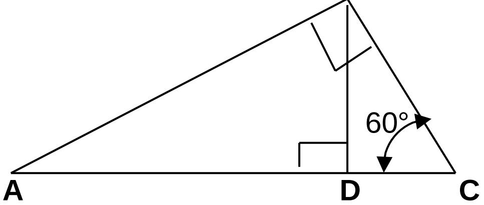
13) El área del triangulo rectángulo de la figura es:



a) $A=\frac{\sqrt{3}}{4}$ b) $A=\frac{\sqrt{3}}{8}$ c) $A=\frac{\sqrt{3}}{16}$ d) $A=\sqrt{3}$ e) ninguna opción es correcta

14) Calcule el perímetro del triángulo rectángulo ABD de la figura.

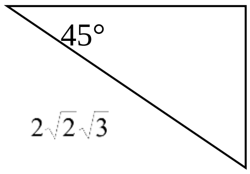
$\overline{BC}$ = 4 m



a) $P=6\sqrt{3}$ b) $P=2+\frac{10}{3}\sqrt{3}$ c) $P=6\left(1+\sqrt{3}\right)$ d) $P=2\left(1+\sqrt{3}\right)$

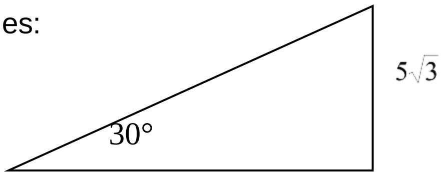
e) ninguna opción es correcta

15) El área del triangulo rectángulo de la figura es:



a) $A=\frac{3}{2}$ b) $A=6$ c) $A=6\sqrt{3}$ d) $A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) ninguna opción es correcta

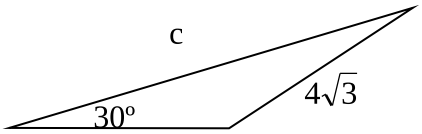
16) El área del triangulo rectángulo de la figura es:



a) $A=\frac{15\sqrt{3}}{3}$ b) $A=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ c) $A=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ d) $A=\frac{75\sqrt{3}}{2}$

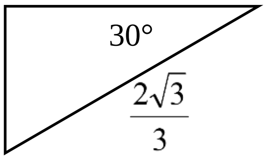
e) ninguna opción es correcta

17) El lado c del triángulo isósceles de la figura es:



a) $c=2\sqrt{3}$ b) $c=\frac{1}{8}$ c) $c=6$ d) $c=12$ e) ninguna opción es correcta

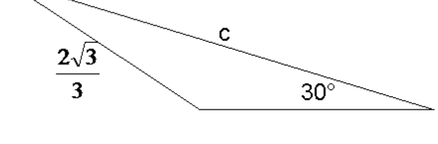
18) El perímetro del triángulo rectángulo de la figura es:



a) $P=1+\sqrt{3}$ b) $P=2+\sqrt{3}$ c) $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $P=\sqrt{3}$

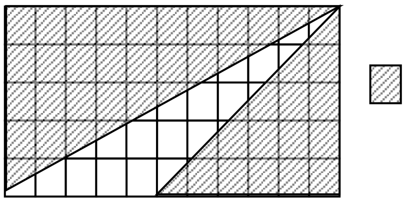
e) ninguna opción es correcta

19) El lado c del triángulo isósceles de la figura es:



a) $c=3\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $c=3\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $c=3\sqrt{6}$ d) $c=5\sqrt{3}$ e) ninguna opción es correcta

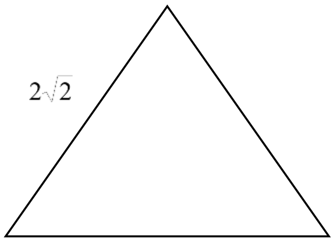
20) Calcule el área de la superficie rayada



Cada mosaico mide 36cm^2

a) $678cm^2$ b) $648cm^2$ c) $774cm^2$ d) $738cm^2$ e) ninguna es correcta.

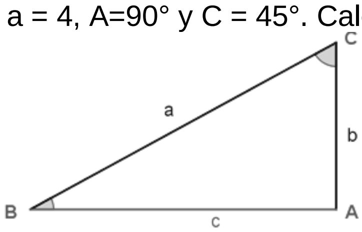
21) El área del triángulo equilátero de la figura es:



a) $A = 2\sqrt{2}$ b) $A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $A = 2\sqrt{3}$ d) $A = 2\sqrt{6}$

e) Ninguna opción es correcta

22) De un triángulo sabemos que: a = 4, A=90° y C = 45°. Calcular el área del triángulo



a) 2 b) 8 c) 4 d) $2\sqrt{2}$ e) ninguna es correcta.

23) Dado un triángulo rectángulo, se sabe que sus dos catetos miden 1/3 cm. Calcular el perímetro del triángulo.

a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ cm b) $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$ cm c) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ cm

d) $\frac{3+\sqrt{2}}{3}$ cm e) Ninguna de las anteriores

24) Indique qué ángulos tienen como valor del $sen(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $\frac{\pi}{2}$ y 2π b) $\frac{\pi}{4} y \frac{3\pi}{4}$ c) 0 y π d) $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$

e) Ninguno de los anteriores

25) Dado un triángulo rectángulo, se sabe que uno de los catetos mide 4 cm y la hipotenusa mide 8 cm. Calcular el área del triángulo

a) $8\sqrt{3}$ cm² b) $2\sqrt{3}$ cm² c) $2\sqrt{2}$ cm² d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm² e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm²

26) Indique cuál de los siguientes enunciados es verdadero respecto de la función $sen(\alpha)$

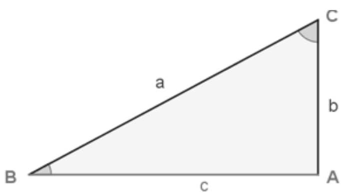
a) $sen(\alpha) < 0,\ para: 0 < \alpha < \pi$ b) $sen(\alpha) > 1,\ para: 0 < \alpha < \pi$
c) $sen(\alpha) > 0,\ para: 0 < \alpha < \pi$ c) Su período es π
e) Ninguno de los enunciados anteriores es verdadero

27) ¿Para qué ángulo se cumplen la siguiente igualdad: $sen(\alpha) = \cos(\alpha)$?
a) $\alpha = 60^{o}$ b) $\alpha = 30^{o}$ c) $\alpha = 45^{o}$ d) $\alpha = 180^{o}$
e)Para ningún ángulo se cumple dicha igualdad

28) Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto de la función: $\cos(x)$

a) Es periódica con período igual a π/2 b)Es periódica con período igual a π
c) Es antiperiódica d)Es periódica con período igual a 2π
e) No existe para valores de $x = k\pi$

29) De un triángulo sabemos que: a = 10 m y B = 30° . Calcular el lado b



a) $2\sqrt{2}$ b) $6\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) 5 e) 10

30) Indique; ¿cuál de las siguientes identidades trigonométricas es verdadera?

a) $(\cos^{-1}\theta)^2 + (\sin^{-1}\theta)^2 = 1$ b) $\cos\pi + sen\pi = 2$ c) $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$
d) $\frac{1}{sen\theta} = \cos\theta$ e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta

31) Calcular la altura de un edificio ubicado a 20 metros de distancia si se ve bajo un ángulo de 45º:
a) $2\sqrt{2}$ m b) $6\sqrt{2}$ m c)10m d) $4\sqrt{3}$ m e) 20 m

32) Dado un triángulo rectángulo, se sabe que dos de sus ángulos interiores son iguales y la hipotenusa mide 10 cm. Calcular el área del triángulo
a) $20\sqrt{3}$ cm² b) $\frac{30\sqrt{2}}{2}$ cm² c) $20\sqrt{2}$ cm² d) 25 cm² e) 100 cm²

33) Un salón rectangular mide 30 metros por $30\sqrt{3}$ metros. Determine el ángulo que forma la diagonal con el lado mayor.

a) 30^{o} b) 45^{o} c) 60^{o} d) 75^{o} e) ninguna opción es correcta

34) Un aula de clase de forma rectangular mide 12 metros por 6 metros. Calcular la longitud de la diagonal.

a) $4\sqrt{3}m$ b) $18m$ c) $3\sqrt{6}m$ d) $6\sqrt{5}m$ e) ninguna opción es correcta

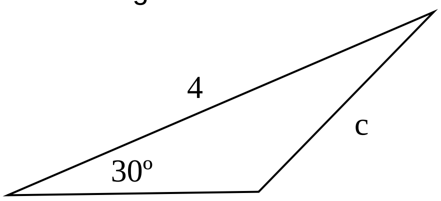
35) Si el sol esta a 30º sobre el horizonte, ¿Qué largo tiene la sombra que proyecta una árbol de 12 metros de altura?

a) $18\sqrt{3}m$ b) $24m$ c) $12\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{2}$ e) ninguna opción es correcta

36) Un trozo de alambre de 15 metros de longitud se dobla para formar un triángulo equilátero. Determinar la superficie de dicho triángulo.

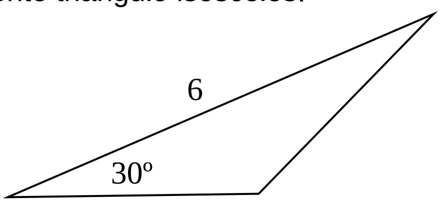
a) $15\sqrt{3}m^2$ b) $25\sqrt{3}m^2$ c) $12\sqrt{2}m^2$ d) $8\sqrt{3}m^2$ e) ninguna opción es correcta

37) Calcular el lado c del siguiente triángulo isósceles.



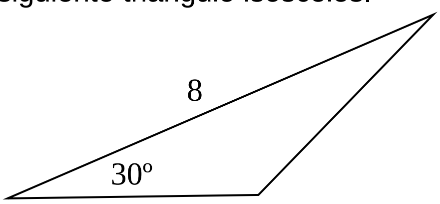
a) $c=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ b) $c=\frac{4}{3}\sqrt{2}$ c) $c=3\sqrt{3}$ d) $c=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ e) ninguna opción es correcta

38) Calcular el área del siguiente triángulo isósceles.



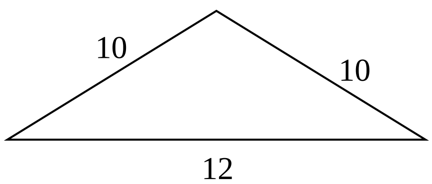
a) $A=4\sqrt{3}$ b) $A=6\sqrt{3}$ c) $A=3\sqrt{3}\sqrt{2}$
d) $A=3\sqrt{3}$ e) ninguna opción es correcta

39) Calcular el perímetro del siguiente triángulo isósceles.



a) $P=8\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ b) $P=8\left(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ c) $P=8\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$
d) $P=8\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ e) ninguna opción es correcta

40) Calcular el área del siguiente triángulo isósceles



a) $A=12\sqrt{3}$ b) $A=24$ c) $A=48$ d) $A=32$ e) ninguna opción es correcta

Resultados

Unidad 1

1) Opción e : FFFF
2) Opción c
3) Opción c
4) Opción e : VVVF
5) Opción e : VVFF
6) Opción e : FFVF
7) Opción c
8) Opción e : VVFV
9) Opción c
10) Opción a
11) Opción c
12) Opción c
13) Opción e: 26
14) Opción d
15) Opción e: $a^{9/20}$
16) Opción a
17) Opción e: $\frac{37}{36}$
18) Opción e: 7
19) Opción c
20) Opción a
21) Opción c
22) Opción e: $x^{-9/20}$
23) Opción d
24) Opción a
25) Opción e: $a^{19/12}$
26) Opción e: $\frac{4}{5}$
27) Opción e: $16 \cdot a^9 \cdot b^{12}$
28) Opción e: $\frac{57}{25}$
29) Opción d
30) Opción e: $\frac{98}{5}$
31) Opción b
32) Opción b
33) Opción e: $-\frac{3}{2}+2i$
34) Opción a
35) Opción e: $\frac{16}{3}-\frac{16}{3}i$
36) Opción a
37) Opción d
38) Opción b
39) Opción a
40) Opción e: $-\frac{38}{13}+\frac{8}{13}i$
41) Opción e: -1
42) Opción a
43) Opción c
44) Opción c
45) Opción e
46) Opción a
47) Opción a
48) Opción d
49) Opción e
50) Opción e: $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$

Unidad 2

1) Opción c
2) Opción c
3) Opción e: $-\frac{13}{18}$
4) Opción b
5) Opción d
6) Opción c
7) Opción d
8) Opción b
9) Opción e: $\frac{x-2}{x+3}$
10) Opción e: -8
11) Opción c
12) Opción e: 1
13) Opción a
14) Opción d
15) Opción e: $-2x^3+4x^2-2x$
16) Opción b

17) Opción e: $2(x+1)^2$
18) Opción b
19) Opción a
20) Opción c
21) Opción a
22) Opción b
23) Opción b
24) Opción d
25) Opción a
26) Opción e: $P(-1)=-24$
27) Opción a
28) Opción c
29) Opción d
30) Opción d
31) Opción e: $-2x^3+2x$
32) Opción d
33) Opción d
34) Opción b
35) Opción d
36) Opción c
37) Opción c
38) Opción e
39) Opción a
40) Opción d
41) Opción c
42) Opción c
43) Opción a
44) Opción c
45) Opción b
46) Opción a
47) Opción d

Unidad 3

1) Opción b
2) Opción d
3) Opción a
4) Opción b
5) Opción a
6) Opción e: $-2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{49}{8}$
7) Opción d
8) Opción a
9) Opción c
10) Opción c
11) Opción e: $2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$
12) Opción a
13) Opción c
14) Opción b
15) Opción c
16) Opción e: $-12x-32$
17) Opción e: $5x^2+10x+8$
18) Opción b
19) Opción e: 7
20) Opción a
21) Opción e: $m=\frac{1}{6}$
22) Opción e: $y=\frac{3}{2}x$
23) Opción e: $a=-\frac{4}{25}$
24) Opción c
25) Opción e: $a=\frac{5}{2}$
26) Opción c
27) Opción d
28) Opción c
29) Opción b
30) Opción e: $V=(-2;-6)$
31) Opción e: $a=-16$
32) Opción d
33) Opción d
34) Opción e: $y=-\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}$
35) Opción c
36) Opción a
37) Opción e: $y=x+\frac{3}{2}$
38) Opción b
39) Opción d
40) Opción c: $V=(-1;2)$
41) Opción a
42) Opción a
43) Opción d
44) Opción c
45) Opción b
46) Opción e: $y=\frac{1}{144}x^2-25$
47) Opción e: ramas descendentes, con dos raíces reales iguales, con ordenada al origen negativa.

Unidad 4

1) Opción e: $a=-\frac{2}{3}; b=6$
2) Opción c
3) Opción a
4) Opción c
5) Opción b
6) Opción c
7) Opción b
8) Opción c
9) Opción e: $x=1; y=-2$
10) Opción d
11) Opción b
12) Opción e: $x=4; y=9$
13) Opción e: $x=-1; y=-\frac{5}{4}$
14) Opción a
15) Opción b
16) Opción d
17) Opción e: $x=\frac{124}{19}$
18) Opción e: $\left(-\frac{15}{4};\frac{3}{2}\right)$
19) Opción a
20) Opción a
21) Opción b
22) Opción e: $\left(\frac{11}{2};\frac{53}{4}\right)$
23) Opción e: $x=\frac{57}{25}$
24) Opción e: $x=\frac{78}{11}$
25) Opción c
26) Opción a
27) Opción d
28) Opción e
29) Opción a
30) Opción d
31) Opción c
32) Opción b
33) Opción d
34) Opción e: $(2;1)$
35) Opción b
36) Opción e: $\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$
37) Opción c
38) Opción d
39) Opción d
40) Opción a

Unidad 5

1) Opción d
2) Opción c
3) Opción c
4) Opción a
5) Opción d
6) Opción e: $\frac{49\sqrt{3}}{4}$
7) Opción a
8) Opción d
9) Opción e: $A=\frac{3\sqrt{3}}{16}$
10) Opción a
11) Opción d
12) Opción e: $P=6\left(1+\sqrt{3}\right)$
13) Opción c
14) Opción c
15) Opción b
16) Opción d
17) Opción d
18) Opción a
19) Opción e: $c=2$
20) Opción e: $1530cm^2$
21) Opción c
22) Opción c
23) Opción b
24) Opción d
25) Opción a
26) Opción e
27) Opción c
28) Opción d
29) Opción d
30) Opción c
31) Opción e: $20m$
32) Opción d
33) Opción a
34) Opción d
35) Opción c

36) Opción e: $A = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

37) Opción d

38) Opción d

39) Opción a

40) Opción c