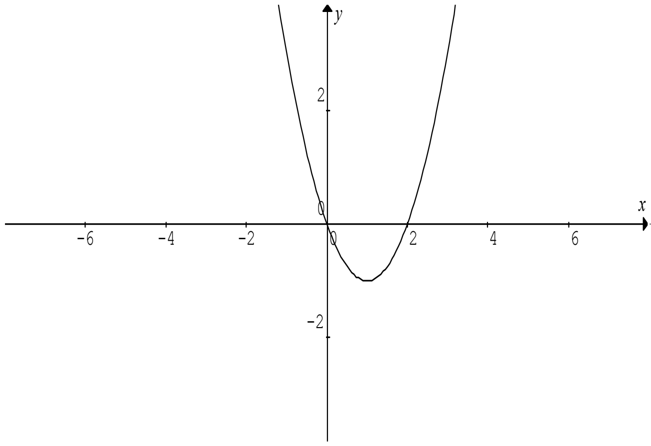
APLICACIONES DE LA DERIVADA

Vamos a investigar el comportamiento de algunas funciones y su relación con las derivadas:

Ejemplo 1: La función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x$ tiene como representación gráfica

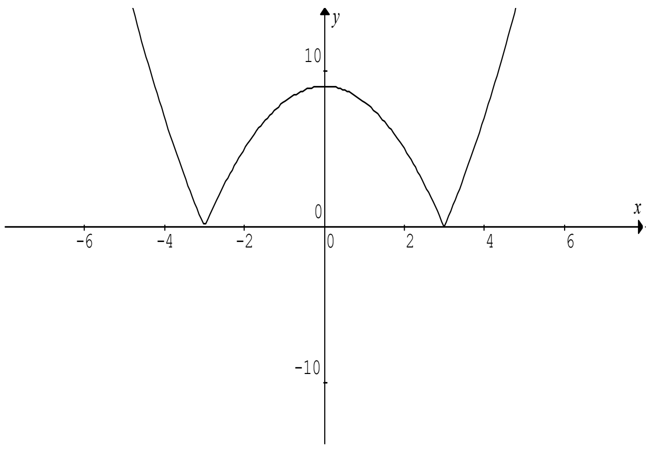


Desde la representación gráfica y a partir de nuestros conocimientos sobre las funciones cuadráticas es evidente concluir que $f(x)$ tiene un mínimo en x=1. Además en el punto (1;-1) la recta tangente a la curva, es horizontal pues $f'(1) = 0$.

Este resultado no es casual, ya que existe una propiedad que afirma que:

Si una función $f(x)$ es derivable en $x = a$, y tiene un extremo relativo en ese punto, entonces $f'(a) = 0$.

Ejemplo 2: Analicemos, ahora, la siguiente función : $f(x) = \left|x^2 - 9\right|$, cuya gráfica es



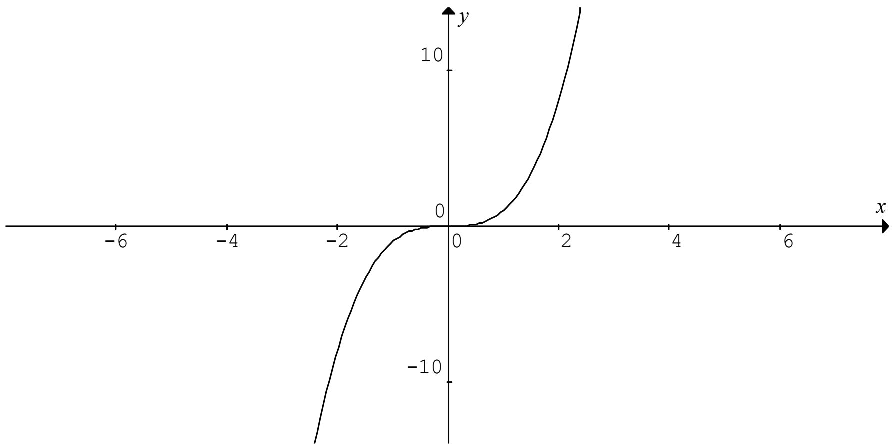
Como ya sabemos, esta función no es derivable en $x = -3$ y $x = 3$, sin embargo alcanza en ellos mínimos relativos como se evidencia en la gráfica.

Te proponemos que demuestres que $f(x)$ no es derivable en $x=-3$ y $x=3$, aplicando la definición de derivada.

Definimos a continuación: valores críticos

Llamaremos valores críticos de una función, a aquellos valores ***a*** pertenecientes a su dominio, en los cuales $f(x)$ es derivable y $f'(a)=0$, o bien, a aquellos en los cuales no existe $f'(a)$

<u>Ejemplo 3</u>: Apliquemos lo visto a esta función : $f(x)=x^3$ cuya gráfica es :



Busquemos sus valores críticos:

Si derivamos : $f'(x)=3x^2$, $f'(x)$ se anula para $x=0$, sin embargo, $f(x)$ no alcanza en $x=0$ extremos relativos, ya que cualquiera sea $x>0: f(x)>0$ y cualquiera sea $x<0: f(x)<0$, es decir la función es creciente en todo su dominio.

Este ejemplo nos muestra que no siempre se puede asegurar que los valores en donde la derivada primera se anula caracterizan a los extremos relativos de la función.

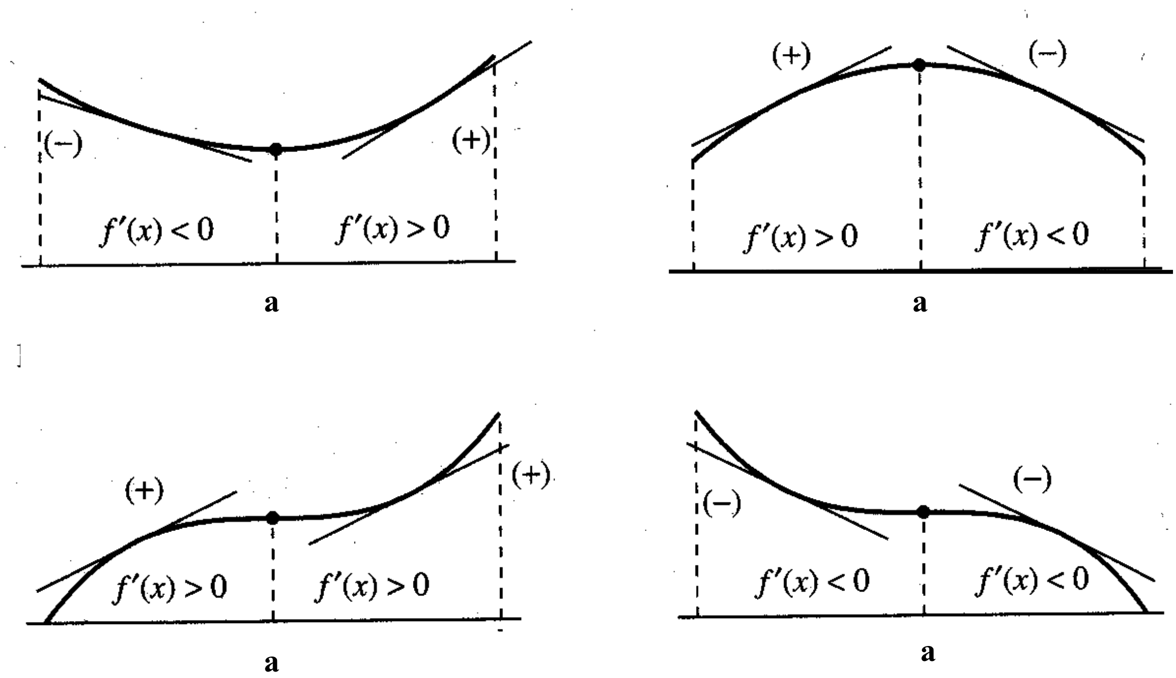
Este problema ya se les había presentado a algunos matemáticos antes que a nosotros y fue necesario reforzar la condición que asegura la existencia de extremos relativos. Por ello se estableció la siguiente proposición:

Sea un valor crítico ***a*** de una función f continua en un intervalo abierto que contiene a ***a.***

Si f es derivable en ese intervalo (o no existe f'(a)), f(a) la podemos clasificar de la siguiente manera:

a) si $f'(x)$ cambia en $x = a$ de negativa a positiva, $f(a)$ ***es un mínimo relativo de*** f

b) si $f'(x)$ cambia en $x = a$ de positiva a negativa, $f(a)$ ***es un máximo relativo de*** f



Ejemplo 4: Investiguemos esta condición a partir del análisis de la función: $f(x) = 2x^3 + 3x^2$, para ello hallaremos los extremos relativos y los intervalos en donde es creciente y/o decreciente, aplicando la condición de existencia de extremos antes definida. Tengamos en cuenta que se trata de una función polinómica, por lo tanto continua.

Para hallar los valores críticos, es necesario encontrar su derivada.

$f'(x) = 6.x^2 + 6x$ si $6.x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -1$. La derivada existe en todo el dominio de la función, por lo tanto son los únicos valores críticos de $f(x)$.

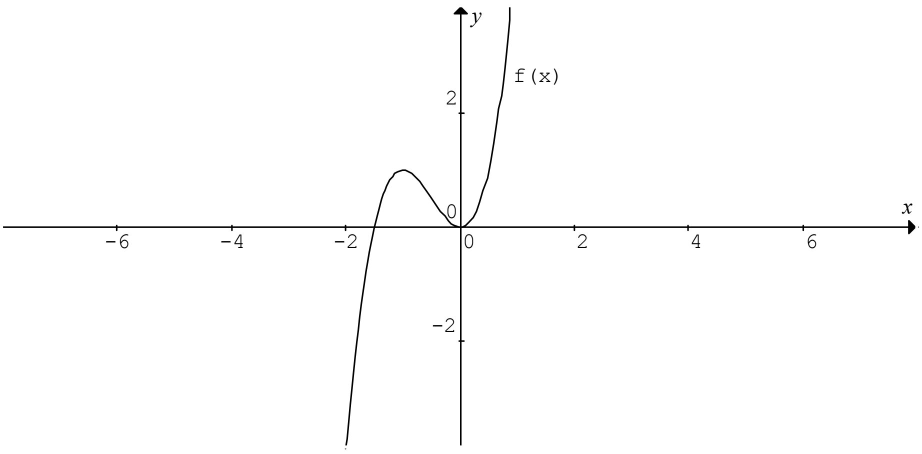
Construyamos un cuadro que nos permita ordenar los datos obtenidos:

Intervalos	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$		$(0;+\infty)$
Signo de $f'(x)$	positivo	0	negativo	0	positivo
La función $f(x)$	$\nearrow$ es creciente	tiene un valor crítico	$\searrow$ es decreciente	tiene un valor crítico	$\nearrow$ es creciente

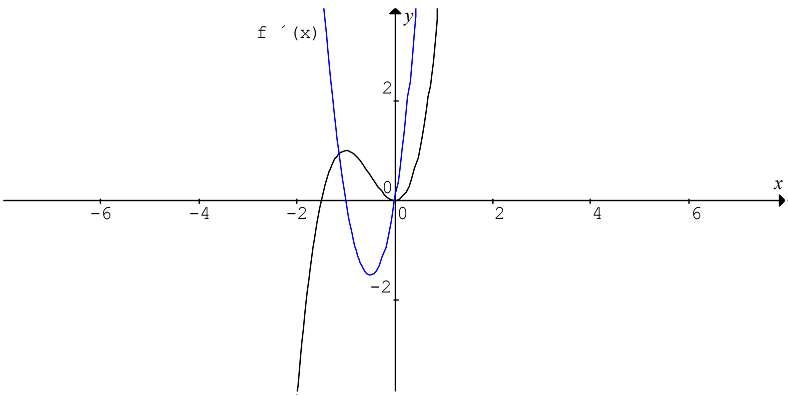
Para justificar el signo de la derivada en los intervalos, aplicamos el corolario del Teorema de Bolzano: "entre dos raíces consecutivas de una función continua, la función no cambia de signo, es decir es positiva o negativa".

Por todo lo expuesto, la función alcanza un máximo relativo en $x=-1$ y un mínino relativo en $x=0$. La función es creciente en $(-\infty;-1)$ y en $(0;+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1;0)$.

Su gráfica es:



Representemos, en un mismo gráfico, la función derivada: $f'(x)=6.x^2+6x$ y la función $f(x)$.



¿Qué conclusiones podés deducir a partir de la comparación de la gráfica de la función y la de su derivada?

<u>Ejemplo 5</u>: Apliquemos lo visto a esta función: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ cuyo $D_f=R-\{0\}$

Si derivamos f(x) obtenemos: $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ $f'(1)=0$ y $f'(-1)=0$

Construyamos un cuadro que nos permita ordenar los datos obtenidos:

	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
Signo de f´(x)	positivo	0	negativo	no existe	negativo	0	positivo
La función f(x)	↗ crece	-2	↘ decrece	no existe	↘ decrece	2	↗ decrece

Por lo tanto $f(-1)=-2$ es un máximo local de f(x) y $f(1)=2$ es un mínimo local de f(x).
Grafica encontrando previamente las ecuaciones de las asíntotas.

Estudiaremos ahora, la concavidad de la función.

Para ello, te proponemos que grafiques, en sistemas coordenados diferentes, las funciones f(x) = $(x-1)^2+1$ y g(x)= $-(x-1).(x-2)$ y traces rectas tangentes a sus gráficas en el intervalo (-1;4).

¿Qué conclusiones podés sacar?

A partir de ellas, podemos afirmar que la gráfica de una función f(x) es cóncava positiva o cóncava hacia arriba en un intervalo de su dominio, si al trazar rectas tangentes a ella por puntos cuyas abscisas pertenezcan a ese intervalo, la gráfica se encuentra por encima de dichas rectas.

Diremos, también, que la gráfica de una función f(x) es cóncava negativa o cóncava hacia abajo en un intervalo de su dominio, si al trazar rectas tangentes a ella por puntos cuyas abscisas pertenezcan a ese intervalo, la gráfica se encuentra por debajo de dichas rectas.

Se puede observar en las gráficas anteriores que, si una función es derivable y cóncava hacia arriba, a medida que aumenta el valor de x, aumenta la pendiente de la recta tangente, es decir, aumenta f´(x).
En cambio, si es cóncava hacia abajo a medida que aumenta el valor de x, decrece f´(x).

<u>Criterio de concavidad:</u>

Sean f(x) y su derivada f´(x) dos funciones derivables en un intervalo, si:

a) si f´´(x) > 0 para todo x perteneciente a un intervalo, entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

b) si f´´(x) < 0 para todo x perteneciente a un intervalo, entonces la gráfica de f(x) es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Si f(x) es una función continua en x=a , diremos que (a;f(a)) es un punto de inflexión de f(x), si en x=a la gráfica de la función cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Propiedad:
Si en x=a hay un punto de inflexión, con f(x) dos veces derivable, entonces $f''(a)=0$

Ahora bien, si $f''(a) = 0$ ¿podemos asegurar que (a;f(a)) es un punto de inflexión de f(x)

Te proponemos que realices un estudio completo de la función $f(x) = x^3 + 1$

Ejemplo 6: Apliquemos todo lo visto a la siguiente función:

$f(x) = x^{\frac{5}{3}} + 1$ su $D_f = R$, si calculamos sus derivadas primeras y segundas:

$$f'(x) = \frac{5}{3}\,x^{\frac{2}{3}} \qquad f''(x) = \frac{10}{9}\,x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\,.\sqrt[3]{x}}$$

La derivada segunda no existe en x = 0 pero la función si está definida en ese valor.
Además, como podrás determinar, $f''(x)$ es positiva a derecha de x= 0 y negativa a su izquierda. Además existe $f'(0)$ y por lo existe la recta tangente en x=0.
Por lo tanto, el punto $(0;1)$ es un punto de inflexión.

A continuación te proponemos una serie de situaciones problemáticas que tienen por objetivo poner en juego los contenidos que hemos estado desarrollando.

1. Un alambre de 40 cm. de longitud, se cortó en dos trozos. Una de las partes se dobló formando un cuadrado y con la otra, un rectángulo tres veces más largo que ancho.
   Hallá la longitud de cada trozo para que la suma de las superficies del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

2. Decidí si las siguientes afirmaciones son correctas: (justificá tu respuesta)
   a) " $f(x) = x^2 . \ln x$ tiene un mínimo relativo en $x = e$ ".
   b) Toda función polinómica alcanza un valor máximo o un valor mínimo dentro de su dominio.
   c) Si una función es siempre creciente, entonces su derivada es siempre positiva.
   d) El valor crítico de una función f(x) puede ser un número que no pertenezca al dominio de la función derivada de f(x).

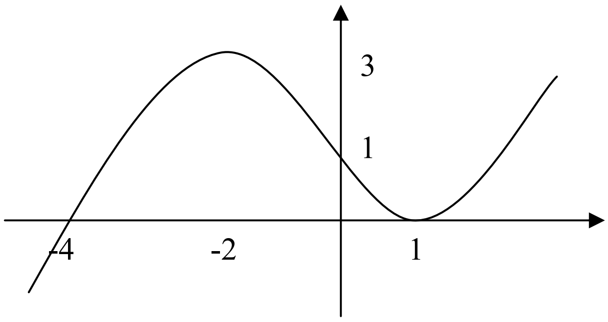
3. Sea la función $f(x)=x^2 \cdot (2x+a)$ hallá el valor de a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$. ¿De qué tipo de extremo se trata? ¿Por qué?

4. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 4cm ¿cuánto deberá medir la base para que el área del triángulo sea máxima?

5. Hallá a y b de manera tal que $f(x)=x^3+ax^2+bx$ tenga un extremo relativo en (2; 3).

6. Hallá, si existen, puntos de inflexión en: $f(x)=x+4+\dfrac{3}{x-1}$

7. En la figura está graficada la derivada primera de una función f(x) de dominio real.



Indicá:

a) los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Justificá.

b) extremos relativos de f(x), aclarando si se trata de máximos o mínimos. Justificá.

c) los intervalos de concavidad de f(x). Justificá.

d) puntos de inflexión de f. Justificá.

8. Dada $g(x)=x^2.\ln(2x)$, calculá intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

9. Determiná los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión (si los hay) de la función: $h(x)=e^{2x}\cdot\left(4-x^2\right)$

10. Explicá, con argumentos algebraicos, porqué una función polinómica de cuarto grado tiene dos puntos de inflexión o ninguno pero nunca uno solo.

11. ¿Son correctas las siguientes afirmaciones? Justificá.
    a) Una función polinómica de grado tres tiene un solo punto de inflexión
    b) Entre dos puntos de inflexión consecutivos siempre hay un extremo relativo.

12. Hallá los valores de *m* para que la función $f(x)=x^4+4x^3+mx^2+3x-2$ sea cóncava hacia arriba para todo x real