4.9 EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1.

Trazar la curva correspondiente a la función:

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 4} = \frac{x^2 + 3}{(x-2)(x+2)}$$

Solución:

Determinemos los elementos fundamentales de la curva como son:

1. Dominio natural de f (x).

Los únicos valores de x para los cuales no existe la función son $x = 2$ y $x = -2$ (valores de x que anulan el denominador). De esta forma: $D_f = R - \{2, -2\}$.

2. Interceptos:

i. Con el eje x (se hace $y = o$ en (1)): $0 = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} \Leftrightarrow x^2 + 3 = 0$

Esta última ecuación no tiene Solución real, indicando con esto que la curva no corta al eje x.

ii. Con el eje y (se hace $x = o$ en (1)): $y = \frac{0^2 + 3}{0^2 - 4} = -\frac{3}{4}$

Asi que, la curva corta al eje y en el punto $P(0, -4/3)$.

3. Asíntotas:

i. **Verticales:** son aquellos valores de x que anulen el denominador de (1). En este caso, las rectas verticales $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales de la curva.

Además, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = +\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

ii. **Horizontales:**

Como: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$, se deduce que $y = 1$ es una **asíntota horizontal** de la curva.

De otro lado, como, $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1 + \frac{7}{x^2-4}$, se deduce entonces que los valores de la función para valores grandes de x en valor absoluto, son mayores que 1, indicando con esto que la curva siempre está por encima de la curva.

En la fig. 4.16 se indica el intercepto de la curva con el eje y, el comportamiento de la curva cerca de las asíntotas.

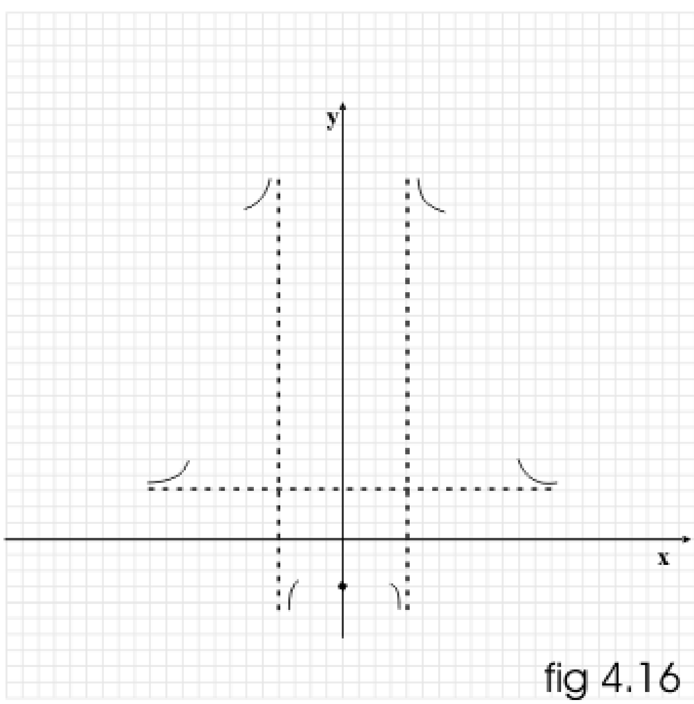

fig. 4.16

iii. **Oblicuas:** No tiene. ¿Porqué?.

4. **Intervalos donde crece y decrece la curva. Extremos relativos.**

Para ello, se hace el análisis de la primera derivada.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Como $\left(x^2-4\right)^2>0$ (positivo), el signo de la derivada, solo depende del signo del factor $(-14x)$. Asi:

Signo de $(-14\,x)$ ó Signo de $f\,'(x)$ ++++++++++++++++| - - - - - - - - - - - - - - -
0

El diagrama indica que: $f\,(x)$ es creciente en $(-\infty,0]$
$f\,(x)$ es decreciente en $[0,+\infty)$

En consecuencia,
$x=0$, corresponde a la abscisa de un punto máximo relativo. $P_m\left(0,\,f(0)\right)\Leftrightarrow P_m\left(0,-3/4\right)$.

5. **Intervalos de concavidad. Posibles puntos de inflexión.**

Para ello, se hace uso de la segunda derivada.

Si $$f'(x)=\frac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{42x^2+56}{(x-2)^3\cdot(x+2)^3}$$

Como $42x^2+56>0$ (positivo), el signo de la segunda derivada depende del signo de los factores del denominador.

Signo de $(x-2)^3$ - - - - - - - - - - - - - - - | +++++++++++++++
2

Signo de $(x+2)^3$ - - - - - - -| +++++++++ +++++++++++++++
-2

Signo de $f\,''(x)$ ++++++++++| - - - - - - - |+++++++++++++++
-2 2

El signo de la segunda derivada indica que:

$f(x)$ es cóncava hacia arriba (+) en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
$f(x)$ es cóncava hacia abajo (-) en $(-2,2)$

En los puntos $x=-2$ y $x=2$ la concavidad cambia de signo, indicando con esto que hay "inflexión" pero, no existe punto de inflexión (¿Porqué?).

La fig. 4.17 recoge toda la información obtenida y proporciona una muy buena aproximación a la gráfica de la función dada.

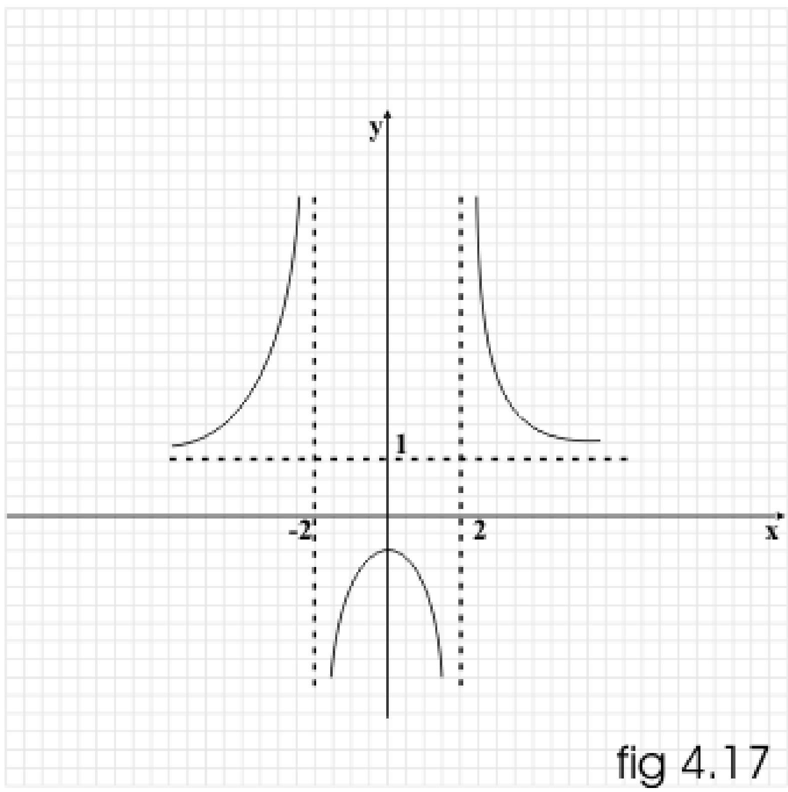

fig. 4.17

Ejemplo 2.

Trazar la curva correspondiente a la función:

$$y = f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} \qquad (1)$$

Solución:

1. **Dominio natural de** ***f(x)*****:**

   El único valor de x para el cual no existe f es $x = 1$ (valor de x que anula el denominador). Asi que $D_f = R - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

   La función es continua para todo $x \neq 1$, por ser el cociente de dos polinomios.

2. **Interceptos:**

   i. Con el eje x (se hace $y = 0$ en (1)): $0 = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \Rightarrow x = -1$. Luego el punto $P(-1,0)$ es el intercepto de la curva con el eje x.

   ii. Con el eje y (se hace $x = 0$ en (1)): $y = \frac{(0+1)^3}{(0-1)^2} = 1$. Luego el punto $Q(0,1)$ es el intercepto de la curva con el eje y.

3. **Asíntotas:**

   i. **Verticales:** El único valor de x que anula el denominador es $x = 1$ y esta es la única asíntota vertical de la curva.

   De otro lado:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)^3 \to tiende, a, 8(+)}{(x-1)^2 \to tiende, a, 0(+)} \to +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1)^3 \to tiende, a, 8(+)}{(x-1)^2 \to tiende, a, 0(+)} \to +\infty$$

   ii. **Horizontales:** No tiene (¿Porqué?).

   iii. **Oblicuas:** Como el grado del numerador es 3, una unidad mas que el grado del denominador que es 2, la curva tiene una asíntota oblicua de la forma $y = mx + b$.

Para determinarla, se efectúa la división entre el numerador y el denominador y se obtiene:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} = (x+5) + \frac{12x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

Asi que $y_A = x + 5$ es la asíntota oblicua de la curva.

Para estudiar el comportamiento de la curva "cerca" de la asíntota se estudia la diferencia: $y_C - y_A$, para un mismo valor de x.

Donde y_C: la ordenada de la curva y y_A: ordenada de la asíntota.

Esto es,

$$y_C - y_A = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} - (x+5) = \frac{12x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

Si $x > 0$, entonces, $y_C - y_A > 0$, indicando con esto, que para valores grandes de x (positivos), la curva esta por encima de la asíntota.

Si $x < 0$, entonces, $y_C - y_A < 0$, lo cual indica que para valores grandes de x (negativos), la curva esta por debajo de la asíntota.

En la figura 3 se ilustra los interceptos de la curva con los ejes coordenados, asi como también el comportamiento de la curva "cerca" de las asíntotas.

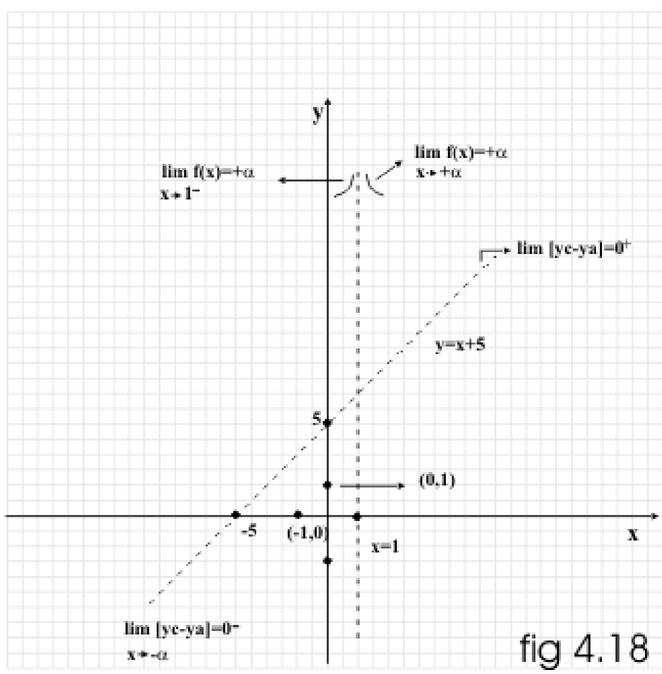

fig 4.18

4. Intervalos donde crece y decrece la curva. Extremos relativos.

Para ello se hace el análisis del signo de la primera derivada.

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x-1)^2-2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)^2\cdot(x-5)}{(x-1)^3}$$

El signo de *f '(x)* depende de los signos que poseen los factores $(x-5)$ y $(x-1)^3$, puesto que $(x+1)^2$ es siempre positivo.

Signo de $(x-5)$ - | ++++++++++
5

Signo de $(x-1)^3$ - - - - - - -| ++++++++++++++++++++++++
1

Signo de $f'(x)$ ++++++++| - - - - - - - - - - - - -|++++++++++
1 5

El signo de *f '(x)* indica:

f crece en los intervalos $(-\infty,1]$ y $[5,+\infty)$
f decrece en el intervalo $(1,5]$

$x = 1$ corresponde a un **máximo relativo**. $P_M(1, f(1)) = P_M(1,0)$
$x = 5$ corresponde a un **mínimo relativo**. $P_m(5, f(5)) = P_m(5,13.5)$

5. Intervalos de concavidad. Posibles puntos de inflexión

Para ello se analiza el signo de la segunda derivada *f''(x)*.

$$f''(x)=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$$

El signo de *f''(x)* solo depende del signo del factor $(x+1)$, puesto que 24 y $(x-1)^4$ son siempre positivos.

Signo de $(x+1)$ - - - - - - |++++++++++++++++++++++++++ Signo de $f''(x)$
$\cap$ -1 $\cup$

El signo de *f ''(x)* indica:

f(x) es cóncava hacia abajo $(\cap)$ en $(-\infty,1]$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba $(\cup)$ en $[-1,+\infty)$.

El punto $P_I(-1, f(-1))$ corresponde a un punto de inflexión, es decir en $P_I(-1,0)$ la curva cambia de concavidad.

En la fig. 4.19 se traza la curva con todos los elementos así obtenidos

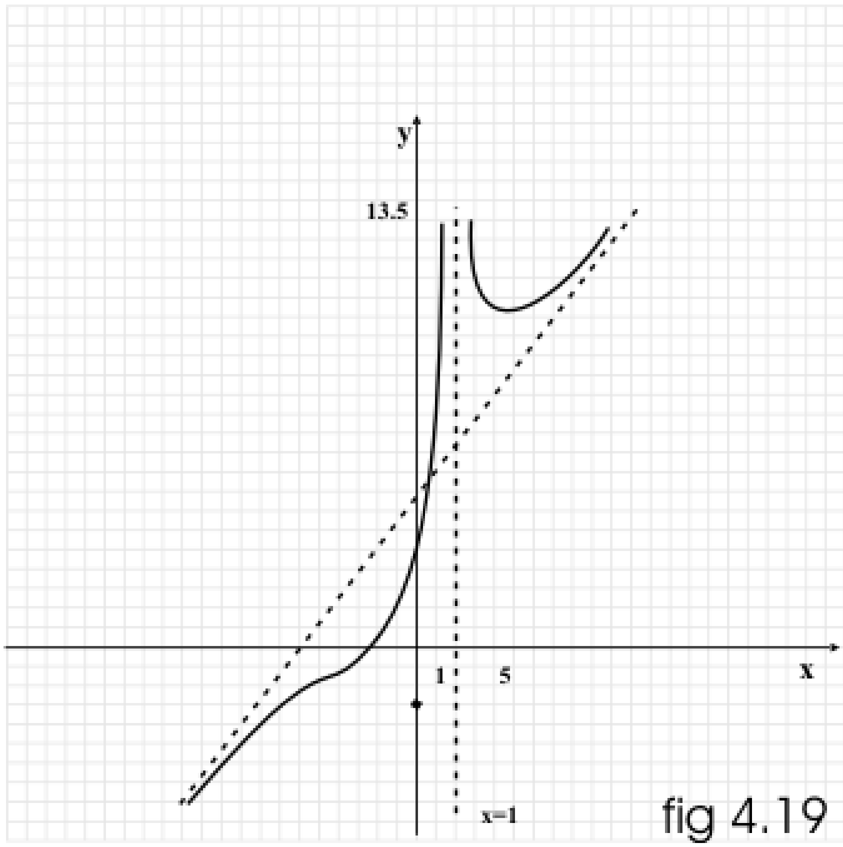

fig. 4.19

Ejemplo 3.

Trazar la gráfica de la función: $y = f(x) = 2senx + \cos 2x$ (1), para x en $[0,2\pi]$

Solución:

Como solo interesa la parte de la gráfica correspondiente al intervalo $[0,2\pi]$, solo se tiene en cuenta para su análisis los siguientes elementos:

1. **Continuidad:**

La función es continua en el intervalo $[0,2\pi]$ por ser suma de funciones continuas

2. **Interceptos:**

i. Con el eje x (se hace $y=0$ en (1)) y se resuelve para x.

$$\begin{aligned} 2senx + \cos 2x = 0 &\Leftrightarrow 2senx + 1 - 2sen^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2sen^2 x - 2senx - 1 = 0 \end{aligned}$$

Al resolver la última ecuación reducible a cuadrática, se obtiene por la fórmula general:

$$senx = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

La ecuación $senx = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, carece de solución (¿Porqué?).

Si $senx = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, entonces $x \approx \pi + 0.37$ y $x = 2\pi - 0.37$

Luego, los interceptos de la curva con el eje x, son los puntos:

$$P_1(\pi + 0.37, 0) \quad \text{y} \quad P_2(2\pi - 0.37, 0)$$

ii. Con el eje y (se hace $x=0$ en (1)). Así $y = 2sen0 + \cos 0 = 1$.

3. **Intervalos donde crece y decrece la curva. Extremos relativos**

Se obtienen analizando el signo de la primera derivada o *f'(x)*.

$$f'(x) = 2\cos x - 2sen2x = 2\cos x - 4senx \cdot \cos x$$

$$f'(x) = 2\cos x \cdot (1 - 2senx)$$

El signo de la derivada depende del signo de los factores $\cos x$ y $1 - 2senx$ en el intervalo $[0,2\pi]$.

$\cos x$ es positivo, si x pertenece al primero o al cuarto cuadrante, es decir, $\cos x > 0$ si $x \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$.

$\cos x$ es negativo, si x pertenece al segundo o al tercer cuadrante, es decir, $\cos x < 0$ si $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

Ahora, como $senx > \frac{1}{2}$ siempre que $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, se deduce que $2senx > 1$ si $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 1 - 2senx < 0$ si $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

También, $senx < \frac{1}{2}$ siempre que $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ó $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$, así que $1 - 2senx > 0$ si $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$.

Al llevar esta información al diagrama adjunto se puede escribir:

Signo de $(2\cos x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

+ + + + + + + + |- - - - - - - - - - - - - - -|+ + + + + + + +

0 $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$ 2π

Signo de $(1 - 2senx)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

+ + + |- - - - - - - -|+ + + + + + + + + + + + + + + +

0 $\frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6}$ 2π

Signo de $f'(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

+ + + |- - - - |+ + +| - - - - - - - - - -|+ + + + + + + +

0 $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{6}$ $\frac{3\pi}{2}$ 2π

El signo de $f'(x)$ indica que

$f(x)$ es creciente en los intervalos: $\left[0, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$, y, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

$f(x)$ es decreciente en los intervalos: $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, y, $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Del diagrama anterior, se puede concluir también que:

$x = \frac{\pi}{6}$ corresponde a un **máximo relativo**, es decir, $P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ es un punto máximo de la curva

$x = \frac{5\pi}{6}$ corresponde a un **máximo relativo**, es decir, $Q\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ es un punto máximo de la curva

$x = \frac{\pi}{2}$ corresponde a un **mínimo relativo**, es decir, $R\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ es un punto mínimo de la curva

Finalmente, $x = \frac{3\pi}{2}$ corresponde a un **mínimo relativo**, es decir, $T\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$ es un punto mínimo de la curva

4. Intervalos de Concavidad. Puntos de inflexión

Para ello se analiza el signo de la segunda derivada: $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2senx - 4\cos 2x \\ &= -2senx - 4(1 - 2sen^2 x) \\ &= 2(4sen^2 x - senx - 2) \qquad (2) \end{aligned}$$

Para hallar los posibles puntos de inflexión, se resuelve la ecuación: $f''(x) = 0$.

Es decir,

$$2(4sen^2 x - senx - 2) = 0$$

Resolviendo esta última ecuación reducible a cuadrática, se obtiene:

$$senx = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0.84 \\ \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx -0.59 \end{cases} \qquad (3)$$

Mediante una calculadora, o una tabla de funciones trigonométricas, se pueden obtener los siguientes valores aproximados de x:

$x \approx 1$; $x \approx \pi - 1$; $x \approx \pi + 0.63$ y $x \approx 2\pi - 0.63$

Para determinar si estos valores de x corresponden a posibles puntos de inflexión, se hace necesario analizar el signo de la segunda derivada

$$f''(x) = 2(4sen^2 x - senx - 2)$$

Los valores dados en (1), permiten escribir $f''(x)$ así:

$$f''(x) = 2(4sen^2 x - senx - 2) = 2\left[senx - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]\cdot\left[senx - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right]$$

Mediante consideraciones similares a la hechas para $f'(x)$, se puede obtener la información que aparece en el diagrama siguiente:

Signo de $\left[senx - \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right]$ - - - - - - -| + + + + + + +| -

0 1 $\pi - 1$ 2π

Signo de $\left[senx - \frac{1-\sqrt{33}}{8}\right]$ + + + + + + + + + + + +| - - - - - - - - - - - - - - - - |+ + + +

0 $\pi + 0.63$ $2\pi - 0.63$ 2π

Signo de $f''(x)$ - - - - - - |+ + + + + | - - - - - | + + + + + + + + + +| - - - - - -

0 1 $\pi - 1$ $\pi + 0.63$ $2\pi - 0.63$ 2π

El signo de $f''(x)$ indica que:

$f(x)$ es **cóncava negativa** $(\cap)$ en: $[0,1] \cup [\pi - 1, \pi + 0.63] \cup [2\pi - 0.63, 2\pi]$
$f(x)$ es **cóncava positiva** $(\cup)$ en: $[1, \pi - 1] \cup [\pi + 0.63, 2\pi - 0.63]$

Además, se obtienen los siguientes puntos de inflexión:

$(1,1.27)$; $(\pi - 1, 1.49)$; $(\pi + 0.63, -0.87)$ y $(2\pi - 0.63, -0.87)$

Con la información dada en los cuatro puntos anteriores, se puede trazar una buena aproximación a la curva correspondiente, como aparece en la fig.

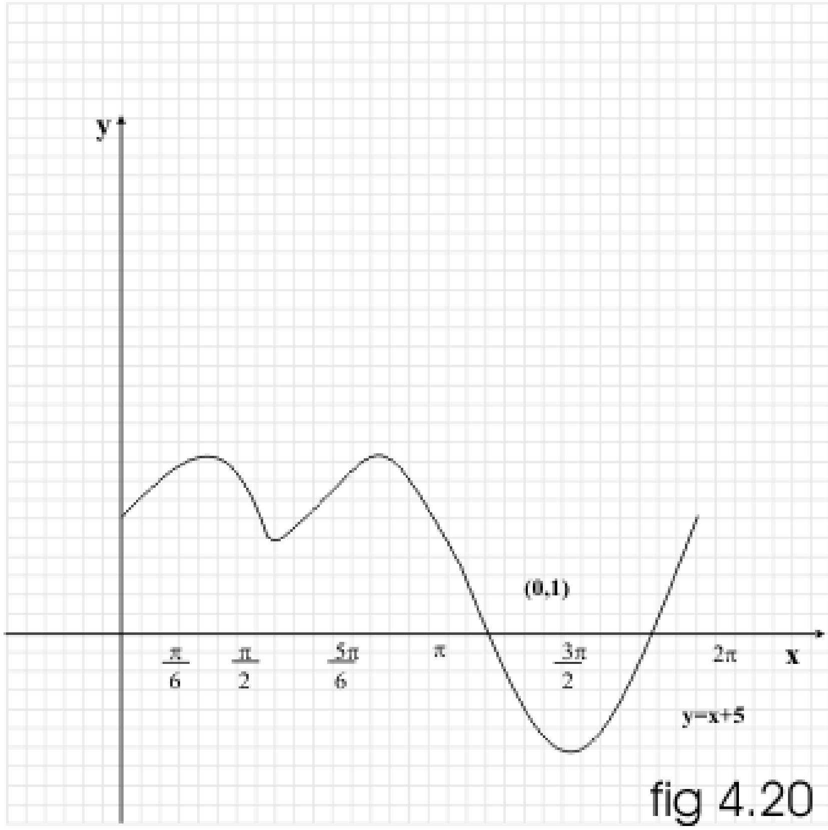

fig 4.20