NOTAS PARA LOS ALUMNOS DE ANALISIS MATEMATICO III

INTEGRALES IMPROPIAS

Ing. Juan Sacerdoti

Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

2002
V 02

INDICE

INTEGRALES IMPROPIAS (II)

1.- PUNTOS SINGULARES DE LAS II

Una forma de extender el concepto de Integral de Riemann (IR) es establecer una nueva definición para los casos donde no se cumplan las dos condiciones previas:

H_1 $d(a,b) < M_1$ **Intervalo acotado**

H_2 $|f| < M_2$ **Función acotada**

Se llaman puntos singulares de la función real a los puntos aislados del intervalo de integración donde no se cumplen las H_1 y H_2 de la Integral de Riemann.

Def.:

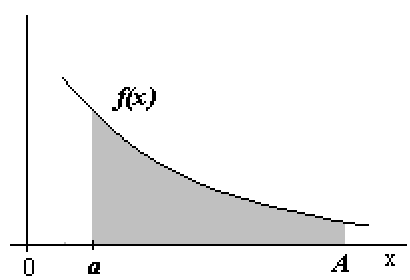
$$s \in \text{punto singular } (f[a,b]) := \begin{cases} V_{+\infty}, V_{-\infty} & H_1 \quad d(a,b) \not< M_1 \quad \text{(Intervalo no acotado)} \\ V_s & H_2 \quad |f| \not< M_2 \quad \text{(Función no acotada)} \end{cases}$$

2.- DEFINICION DE INTEGRALES IMPROPIAS Y CONVERGENCIA

2.1.- DEFINICION DE INTEGRALES IMPROPIAS

Suponiendo que en la Integral Impropia existe un único punto singular, se presentan los dos casos, cuando el intervalo no es acotado o la función no es acotada.

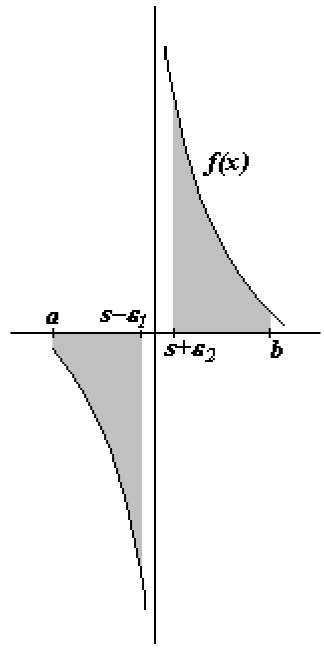
Definición de Integral Impropia: Caso Intervalo no acotado



H_1 $\forall A$ $\int_a^A f(x)\,dx \in IR$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$

Definición de Integral Impropia: Caso función no acotada



H_1 $\quad s \in [a\ b]$

H_2 $\quad \forall\ (\varepsilon_1\ \varepsilon_2) \qquad \int_a^{s-\varepsilon_1} f(x)\,dx \in IR \qquad \int_{s+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \in IR$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{s-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{s+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx$$

Obs.1: Las variables ε_1 y ε_2 son diferentes. Más adelante se estudiará que sucede si definen como iguales.

Obs.2: Las II sobre intervalo no acotado se pueden transformar en II del tipo de funciones no acotadas por el cambio de variables t = 1/(x-s).

Por lo tanto para el estudio de las propiedades de las II, es indiferente hablar de un tipo u otro.

2.2.- INTEGRALES CONVERGENTES DIVERGENTES Y OSCILANTES

Las II como límite de IR se clasifican según la existencia o no del límite y si es finito o infinito.

Esta clasificación es análoga a la que se hace para las series. Se denomina entonces II convergentes, divergentes y oscilantes, las que cumplen:

Def

$\int_I \quad \in CV \ := \ \exists \lim \int_{IR} \quad$ ***finito***

$\int_I \quad \in DV \ := \ \exists \lim \int_{IR} \quad$ ***infinito***

$\int_I \in OSC := \not\exists \lim \int_{IR}$

Obs.: En algunos textos se usa el concepto de Divergente como contrario lógico de Convergente. La convención de este texto es que Integral No Convergente es Divergente u Oscilante.

2.3.- CONVERGENCIA ABSOLUTA

Se define en forma análoga a como se hace con las series la Convergencia Absoluta de las Integrales Impropias . Esto es la Convergencia de la Integral de | f | .

Def: $\int_I f \in CA := \int_I |f| \in CV$

2.4.- EJEMPLOS DE II

Ejemplo 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

I.- Análisis de existencia de la función sobre el intervalo de Integración y puntos singulares V_{ps}

/H_1 $[0,+\infty[$ /< M_1 $\Rightarrow$ Vps : $V_{+\infty}$
H_2 $|f| < M_2$

II.- Existencia de IR

$$\int_0^{A} \frac{1}{1+x^2}\, dx \Leftarrow f \in C/[0\ A]$$

III.- Cálculo por definición

$$\int_0^{A} \frac{1}{1+x^2}\, dx = Arctg\ x \Big|_0^A = Arctg\ A \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

El resultado final es:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \in CV$$

Ejemplo 2

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}\, dx$$

I.- Análisis de existencia de la función sobre el intervalo de Integración y puntos singulares V_{ps}

La función $\dfrac{1}{\sqrt{x(x^2-1)}}$ no está definida para el intervalo $x \in [0\ 1]$ por lo tanto no existe la Integral Impropia.

Ejemplo 3

$$\int_0^1 Lx\ dx$$

I.- Análisis de existencia de la función sobre el intervalo de Integración y puntos singulares V_{ps}

H_1 $d(0,1) < M_1$
$/H_2$ $|\ Lx\ |\ /< M_2$ $\Rightarrow$ $Vps : V_{0+}$

II.- Existencia de IR

$$\int_\varepsilon^1 Lx\ dx \Leftarrow f \in C/[\varepsilon\ 1]$$

III- Cálculo por definición

$$\int_\varepsilon^1 Lx\ dx = x\,(L\,x-1)\Big|_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\,(L\varepsilon - 1) \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} -1$$

El resultado final es:

$$\int_0^1 Lx\ dx = -1 \qquad\qquad \int_0^1 Lx\ dx \in CV$$

Ejemplo 4

$$\int_0^{+\infty} \sin x\ dx$$

I.- Análisis de existencia de la función sobre el intervalo de Integración y puntos singulares V_{ps}

$/H_1$ $[0,+\infty[\ /< M_1$ $\Rightarrow$ $Vps : V_{+\infty}$
H_2 $|\sin x\ | < M_2$

II.- Existencia de IR

$$\int_0^A \sin x\ dx \Leftarrow \sin x \in C/[0\ A]$$

III.- Cálculo por definición

$$\int_0^A \sin x \; dx = -\cos x \Big|_0^A = -\cos A + 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} /\exists \, Lim$$

El resultado final es:

$$/\exists \int_0^{+\infty} \sin x \; dx \qquad\qquad \int_0^{+\infty} \sin x \; dx \in OSC$$

Ejemplo 5

$$\int_2^3 \frac{1}{x-3} \; dx$$

I.- Análisis de existencia de la función sobre el intervalo de Integración y puntos singulares V_{ps}

$H_1 \quad d(2,3) < M_1$

$/H_2 \quad \left| \frac{1}{x-3} \right| /< M_2 \quad \Rightarrow \quad Vps : V_{3-}$

II.- Existencia de IR

$$\int_2^{3-\varepsilon} \frac{1}{x-3} \; dx \;\Leftarrow\; f \in C/[2 \quad 3-\varepsilon]$$

III.- Cálculo por definición

$$\int_2^{3-\varepsilon} \frac{1}{x-3} \; dx = L|x-3| \Big|_2^{3-\varepsilon} = L\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0+]{} -\infty$$

El resultado final es:

$$\int_2^{3-\varepsilon} \frac{1}{x-3} \; dx \xrightarrow[\varepsilon\to0+]{} -\infty \qquad\qquad \int_2^{3-\varepsilon} \frac{1}{x-3} \; dx \in DV$$

Ejemplo 6

$$\int_2^5 \frac{1}{x-3} \; dx$$

I.- Análisis de existencia de la función sobre el intervalo de Integración y puntos singulares V_{ps}

$H_1 \quad d(2,5) < M_1$

$/H_2 \quad \left| \frac{1}{x-3} \right| /< M_2 \quad \Rightarrow \quad Vps : V_{3-}\, V_{3+}$

II.- Existencia de IR

$$\int_2^{3-\varepsilon 1} \frac{1}{x-3} \; dx \;\Leftarrow\; f \in C/[2 \quad 3-\varepsilon_1]$$

$$\int_{3+\varepsilon 2}^{5} \frac{1}{x-3} \; dx \;\Leftarrow\; f \in C/[3+\varepsilon_2 \quad 5]$$

III.- Cálculo por definición

$$\int_{2}^{3-\varepsilon 1} \frac{1}{x-3}\,dx + \int_{3+\varepsilon 2}^{5} \frac{1}{x-3}\,dx = L|x-3|\Big|_{2}^{3-\varepsilon_1} + L|x-3|\Big|_{3+\varepsilon_2}^{5}$$

$$= L\varepsilon_1 + L5 - L\varepsilon_2 \xrightarrow[\substack{\varepsilon 1\to 0+\\ \varepsilon 2\to 0+}]{} /\exists\, Lim$$

El resultado final es:

$$\nexists \int_{2}^{5} \frac{1}{x-3}\,dx \qquad\qquad \int_{2}^{5} \frac{1}{x-3}\,dx \in OSC$$

Ejemplo 7

$$\int_{0}^{+\infty} k\,dx$$

I.- Análisis de existencia de la función sobre el intervalo de Integración y puntos singulares V_{ps}

$/H_1 \quad [0,+\infty[\ /< M_1 \quad \Rightarrow \quad Vps : V_{+\infty}$

$H_2 \quad |\,f\,| < M_2$

II.- Existencia de IR

$$\int_{0}^{A} k\,dx \Leftarrow f \in C/[0\ A]$$

III.- Cálculo por definición

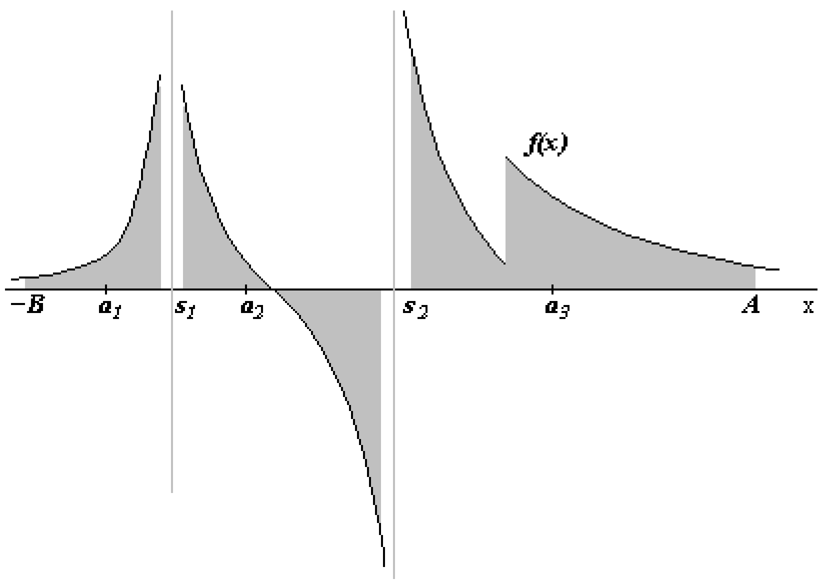
$$\int_{0}^{A} k\,dx = k\,x\Big|_{0}^{A} = k\,A \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty \qquad k > 0 \qquad \int_{0}^{A} k\,dx \in DV$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 \qquad k = 0 \qquad \int_{0}^{A} k\,dx \in CV$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} -\infty \qquad k < 0 \qquad \int_{0}^{A} k\,dx \in DV$$

2.5. INTEGRALES IMPROPIAS CON UN NUMERO FINITO DE SINGULARIDADES

La II cuando tiene un número finito de puntos singulares se define como una suma de II cada una de ellas con un solo punto singular.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{B\to+\infty} \int_{-B}^{a1} f(x)\,dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_{a1}^{s1-\varepsilon 1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{s1+\varepsilon_2}^{a2} f(x)\,dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_3\to 0^+} \int_{a2}^{s2-\varepsilon 3} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_4\to 0^+} \int_{s2+\varepsilon 4}^{a3} f(x)\,dx +$$

$$\ldots$$

$$+ \lim_{A\to+\infty} \int_{a}^{A} f(x)\,dx$$

La II resultante es entonces un límite múltiple

2.6.- EJEMPLOS DE INTEGRALES IMPROPIAS PARA TABLA DE COMPARACION

Algunas integrales impropias que su usarán más adelante para estudiar la CV por comparación son:

Ejemplo (Tabla 1)

$$\int_{V_{+\infty}} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \qquad \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \qquad a > 0$$

I.- Análisis de existencia de la función sobre el intervalo de Integración y puntos singulares V_{ps}

$/H_1$ $[0,+\infty[$ $/< M_1$ $\Rightarrow$ Vps : $V_{+\infty}$

H_2 $\left| \frac{1}{x^{\alpha}} \right| < M_2$

II.- Existencia de IR

$$\int_{a}^{A} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \Leftarrow f \in C/[a\ \ A]$$

III.- Cálculo por definición

$$\int_{a}^{A} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \xrightarrow{\alpha \neq 1} = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{a}^{A} = \frac{A^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \xrightarrow[\substack{A \to +\infty \\ \alpha > 1}]{} \frac{-a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

$$\xrightarrow[\substack{A \to +\infty \\ \alpha < 1}]{} +\infty$$

$$\xrightarrow{\alpha = 1} = \left. L\, x \right|_{a}^{A} = LA - La \xrightarrow[A \to +\infty]{} +\infty$$

El resultado final es:

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \in CV \iff \alpha > 1$$

Ejemplo (Tabla 2)

$$\int_{V_{0+}} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \qquad \int_{\varepsilon}^{a} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \qquad a > 0$$

I.- Análisis de existencia de la función sobre el intervalo de Integración y puntos singulares V_{ps}

H_1 $d(0,a) < M_1$

$/H_2$ $\left| \frac{1}{x^{\alpha}} \right|$ $/< M_2$ $\Rightarrow$ Vps : V_{0+}

II.- Existencia de IR

$$\int_{\varepsilon}^{a} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \Leftarrow f \in C/[\varepsilon\, a]$$

III.- Cálculo por definición

$$\int_{\varepsilon}^{a} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \xrightarrow{\alpha \neq 1} = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{\varepsilon}^{a} = \frac{a^{-\alpha+1} - \varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0+ \\ \alpha < 1}]{} \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

$$\xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0+ \\ \alpha > 1}]{} +\infty$$

$$\xrightarrow{a=1} = \quad L\,x\,\Big|_{\varepsilon}^{a} = La - L\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} +\infty$$

El resultado final es:

$$\int_{0+} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \in CV \iff \alpha < 1$$

3.- VALOR PRINCIPAL DE UNA INTEGRAL IMPROPIA

En el caso de una II oscilante que depende de un límite doble o múltiple, este límite no existe.
Pero con una restricción en el pasaje al límite, tomando todas las variables de la siguiente manera:

$$\frac{1}{-B} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n = \frac{1}{A}$$

puede darse el caso de que sí exista el límite nuevo. Esta convención genera una nueva definición de integral, que se llama Valor Principal de la Integral.

Se retoma el ***Ejemplo 5*** visto anteriormente:

$$\int_2^5 \frac{1}{x-3}\, dx$$

$$\int_2^{3-\varepsilon 1} \frac{1}{x-3}\, dx + \int_{3+\varepsilon 2}^5 \frac{1}{x-3}\, dx = L|x-3|\Big|_2^{3-\varepsilon_1} + L|x-3|\Big|_{3+\varepsilon_2}^{5}$$

$$= L\varepsilon_1 + L5 - L\varepsilon_2 \xrightarrow[\substack{\varepsilon 1\to 0+\\ \varepsilon 2\to 0+}]{} \nexists\, Lim$$

$$\int_2^5 \frac{1}{x-3}\, dx \in OSC$$

Sin embargo si se toma $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$\int_2^{3-\varepsilon} \frac{1}{x-3}\, dx + \int_{3+\varepsilon}^5 \frac{1}{x-3}\, dx = L\varepsilon + L5 - L\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} L5$$

Entonces

$$\exists\, VP \int_2^5 \frac{1}{x-3}\, dx = L5$$

La definición de valor principal de una II con n+2 puntos singulares es entonces:

Definición de Valor Principal de una Integral Impropia con un número finito de singularidades

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big\{ \int_{-1/\varepsilon}^{a1} f(x)\, dx +$$

$$+ \int_{a1}^{s1-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{s1+\varepsilon}^{a2} f(x)\, dx +$$

$$+ \int_{a2}^{s2-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{s2+\varepsilon}^{a3} f(x)\, dx +$$

$$\ldots$$

$$+ \int_{a}^{1/\varepsilon} f(x)\, dx \Big\}$$

El VP de la II resultante es entonces un límite simple en contraposición de la Integral Impropia con un número finito de singularidades que era un límite múltiple de n+2 puntos singulares:

$$\{-\infty, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_{2n-1} = \varepsilon_{2n} = +\infty\}$$

tomando:

$$\frac{1}{-B} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n = \frac{1}{A}$$

3.2.- EJEMPLO DE ANÁLISIS DE VALOR PRINCIPAL PARA TABLA DE COMPARACIÓN

Una Integral impropia

$$\int_a^b \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \qquad a < 0 < b \qquad \alpha \in R$$

I.- Existencia de la función en el intervalo de integración [a b] y análisis de los puntos singulares en V_{ps}

Estudiando ésta integral que en su intervalo de integración incluye al 0. Aquí debe analizarse la existencia de la función en el Vecinal de cero pues no existe para todos los valores de α cuando x < 0:

La función f existe solamente si α es fraccionario con denominador impar

$$f: [a,b] - \{0\} \to R$$

$$x \to \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad \alpha = \frac{p}{q} \in Q \quad \wedge \quad (p,q) \in \textit{Primos entre si} \quad \wedge \quad q \in \textit{Impar}$$

H_1 d(a,b) < M_1

$/H_2$ $\left| \frac{1}{x^{\alpha}} \right| /< M_2 \quad \Rightarrow \quad$ Vps : V_{0-} V_{0+}

II.- Existencia de IR

$$\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx + \int_{+\varepsilon}^{b} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \quad \Leftarrow \quad f \in C/[a\ -\varepsilon] \cup [+\varepsilon\ b]$$

III.- Cálculo del VP por definición

$$\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx + \int_{+\varepsilon}^{b} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \xrightarrow{a \neq 1} = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^{-\varepsilon} + \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{\varepsilon}^{b} =$$

$$= \frac{(-\varepsilon)^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{b^{-\alpha+1} - \varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

$$= \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0+ \\ \alpha = p/q < 1 \\ q \in Im\ par}]{} \frac{-a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

$$= \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0+ \\ \alpha = p/q > 1 \\ q \in Im\ par \\ p \in Par}]{} -\infty$$

$$= \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0+ \\ \alpha = p/q > 1 \\ q \in Im\ par \\ p \in Im\ par}]{} \frac{-a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

$$\xrightarrow{a=1} = \left. L|x| \right|_a^{-\varepsilon} + \left. L\,x \right|_{\varepsilon}^{b} = L\varepsilon - L|a| + Lb - L\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} Lb - L|a|$$

IV.- El resultado final es:

$$a < 0 < b \qquad \alpha \in R$$

$$\int_a^b \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \in CV \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{p}{q} \in Q \quad \wedge \quad (p,q) \in \textit{Primos entre si} \quad \wedge \quad p < q \quad \wedge \quad q \in \textit{Impar}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{p}{q} \in Q \quad \wedge \quad (p,q) \in \textit{Primos entre si} \quad \wedge \quad p \geq q \quad \wedge \quad q \in \textit{Impar} \wedge \quad p \in \textit{Impar}$$

4.- CRITERIOS DE CV

El análisis del Convergencia de las II se hace por medio de criterios (teoremas) que nos permitan asegurar su tipo (CV, DV, OSC, $\exists$ VP).

En todos los criterios se analiza un sólo punto singular que puede ser tanto de intervalo no acotado o de función no acotada, en forma indiferente, sabiendo que un tipo de II siempre se puede transformar en la otra.

4.1.- ANALISIS DE LA DEFINICIÓN

La definición de la Integral Impropia en el caso de Intervalo no acotado puede presentarse de otra forma

$$\textbf{\textit{Def}} \qquad \int_a^{+\infty} \in CV \quad \Leftrightarrow \quad \left| \int_{V_s} \right| < \varepsilon$$

$$\int_a^A \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_a^{+\infty} \;:=\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_0 \;:\; \forall\, A > A_0 \;\Rightarrow\; \left| \int_a^A - \int_a^{+\infty} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \; \left| \int_A^{+\infty} \right| < \varepsilon \;\; =: \;\; \left| \int_{V_s} \right| < \varepsilon$$

Análogamente se puede presentar la Definición de II V_s cuando el intervalo es finito (s es finito)

4.2.- CRITERIO DE BOLZANO CAUCHY

$$T_1 .- \; [\; \forall\varepsilon>0 \;\; \exists V_s \;:\forall(x_1\, x_2)\in V_s^2 \cap D \;\Rightarrow \left| \int_{x1}^{x2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon \;] \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{V_s} f \;\in CV$$

D.- Aplicando el Criterio de Bolzano-Cauchy para la existencia del límite de funciones

$$\lim_{x\to a} F(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0 \;\; \exists V_a : \forall(x_1\, x_2)\in(V_a^2 \cap D) \quad \Rightarrow \;\; |F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$$

Como

$$F(A) = \int_a^A f(x)\, dx$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^A f(x)\, dx \;=\; \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0 \;\; \exists V_{+\infty} : \forall(x_1\, x_2)\in V_{+\infty}^{\;2} \;\Rightarrow\; \left| \int_a^{A1} - \int_a^{A2} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \; \left| \int_{A1}^{A2} \right| < \varepsilon$$

Un resultado equivalente se obtiene para V_s con s finito.

4.3.- CRITERIO DE COMPARACION

4.3.1.- CASO GENERAL

T_1.- H_1 $\quad g_1 \le f \le g_2$

H_2 $\quad \int_{Vs} g_2 \in CV \quad \Rightarrow \quad T \quad \int_{Vs} f \in CV$

H_3 $\quad \int_{Vs} g_1 \in CV$

D.-

$$g_1 \le f \le g_2$$

$$\int_{Vs} g_1 \le \int_{Vs} f \le \int_{Vs} g_2$$

$$-\varepsilon \le \int_{Vs} g_1 \le \int_{Vs} f \le \int_{Vs} g_2 \le \varepsilon$$

TCR $\quad H_1$

$/T \quad \Rightarrow \quad /H_2$

H_3

4.3.2.- CRITERIO DE COMPARACION: CASOS PARTICULARES

T'_1 $\quad H_1 \quad 0 \le f \le g_2$

$H_2 \quad \int_{Vs} g_2 \in CV \quad \Rightarrow \quad T \quad \int_{Vs} f \in CV$

TCR $\quad H_1$

$/T \quad \Rightarrow \quad /H_2$

T''_1 $\quad H_1 \quad -g_2 \le f \le g_2$

$H_2 \quad \int_{Vs} g_2 \in CV \quad \Rightarrow \quad T \quad \int_{Vs} f \in CV$

También se demuestra a partir de T''_2 y la tautología $-|f| \le f \le |f|$ ***[que satisface a H_1]***

$$\int_{Vs} |f| \in CV \quad \Rightarrow \quad T \quad \int_{Vs} f \in CV$$

Es decir

T'''_1 $\quad \int_{Vs} f \in CA \quad \Rightarrow \quad T \quad \int_{Vs} f \in CV$

4.4.- CRITERIO DE COMPARACION POR LIMITE

4.4.1.- COMPARACION POR LIMITE: TEOREMA I

T_2 $\quad H_1 \quad \dfrac{f}{g} \xrightarrow[x \to s]{} \lambda : \; \lambda \neq 0 \; \wedge \; \lambda \neq \pm\infty$

$\quad H_2 \quad \int_{Vs} g \in CV \quad \Leftrightarrow \quad T \quad \int_{Vs} f \in CV$

D [⇒] *Por definición de límite*

$$\left|\frac{f}{g} - \lambda\right| < \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f}{g} < \lambda + \varepsilon$$

$$g > 0 \;\Rightarrow\; (\lambda - \varepsilon)\, g < f < (\lambda + \varepsilon)\, g \;\cup\; g < 0 \;\Rightarrow\; (\lambda - \varepsilon)\, g > f > (\lambda + \varepsilon)\, g$$

En ambos casos aplicando el Criterio de Comparación

$$\int_{Vs} g \in CV \quad \Rightarrow \quad \int_{Vs} f \in CV$$

[⇐]

$$\frac{f}{g} \xrightarrow[x \to s]{} \lambda : \lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g}{f} \xrightarrow[x \to s]{} \frac{1}{\lambda} : \frac{1}{\lambda} \neq 0 \;\wedge\; \frac{1}{\lambda} \pm\infty$$

Por lo tanto aplicando la demostración anterior

$$\int_{Vs} f \in CV \quad \Rightarrow \quad \int_{Vs} g \in CV$$

4.4.2.- COMPARACION POR LIMITE: TEOREMA II

T'_2 $\quad H_1 \quad \dfrac{f}{g} \xrightarrow[x \to s]{} \lambda = 0$

$\quad H_2 \quad \int_{Vs} g \in CV \quad \Rightarrow \quad T \quad \int_{Vs} f \in CV$

D [$\Rightarrow$] *Es la misma demostración de la condición suficiente del teorema anterior, tomando λ=0*

$$\int_{Vs} g \in CV \quad \Rightarrow \quad \int_{Vs} f \in CV$$

No es válido la condición necesaria

<u>4.4.3.- COMPARACION POR LIMITE: TEOREMA III</u>

T''₂

$$T''_2 \quad H_1 \quad \frac{f}{g} \xrightarrow[x \to s]{} \lambda = \pm\infty$$

$$H_2 \quad \int_{Vs} g \in CV \quad \Leftarrow \quad T \quad \int_{Vs} f \in CV$$

D [$\Leftarrow$]

$$\frac{f}{g} \xrightarrow[x \to s]{} \lambda = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g}{f} \xrightarrow[x \to s]{} \frac{1}{\lambda} = 0$$

Entonces estamos en las condiciones del teorema anterior

$$\int_{Vs} f \in CV \quad \Rightarrow \quad \int_{Vs} g \in CV$$

4.5.- CRITERIO DE COMPARACIÓN CON SERIES POSITIVAS

Estos criterios de Comparación muestran la íntima relación entre las Integrales Impropias y las Series en cuanto a los estudios de Convergencia.

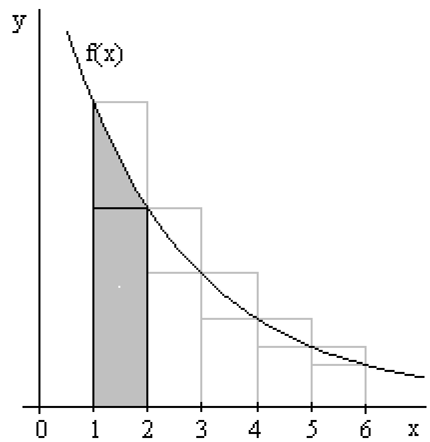
En particular se tiene:

T_3.- Comparación con Series No negativas monótonas No crecientes

H_1 $\quad f \geq 0$

H_2 $\quad f' \leq 0$

H_3 $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \in CV \iff \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \in CV$



D.-

$0 \leq f(2)\,.\,1 \leq \displaystyle\int_1^2 f \leq f(1)\,.\,1$

$0 \leq f(3)\,.\,1 \leq \displaystyle\int_2^3 f \leq f(2)\,.\,1$

...

$0 \leq f(n+1)\,.\,1 \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f \leq f(n)\,.\,1$

Sumando

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Pasando al límite cuando n tiende a $+\infty$.

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \leq \int_1^{+\infty} f \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$$

Por una parte si

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \in CV \iff \sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \in CV$$

Pues difieren en una constante. Entonces por comparación:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \in CV \iff \sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \in CV \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \in CV$$

Asimismo por comparación si

$$\int_1^{+\infty} f(x)\ dx \in CV \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \in CV$$

pues está acotada inferiormente por 0.

<u>4.6.- CRITERIO DE ABEL</u>

$$\boldsymbol{T_4.-}\quad \boldsymbol{H_1}\quad \boldsymbol{f:}\quad \begin{cases} |f| \le M \\ f \ge 0 \\ f' \le 0 \\ f \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H_2}\quad \forall (p\ q)\quad \left| \int_p^q g(x)\ dx \right| \le M_1 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{V_{+\infty}} f(x)\ g(x)\ dx \in CV$$

D.-

$$\int_a^A f(x)\ g(x)\ dx = f(x) \int_a^x g(t)\ dt \Big|_a^A - \int_a^A f'(x) \int_a^x g(t)\ dt\ dx$$

$$= f(A) \int_a^A g(t)\ dt - \int_a^A f'(x) \int_a^x g(t)\ dt\ dx$$

El primer término tiende a cero pues:

$$\left| f(A) \int_a^A g(t)\ dt \right| \le |f(A)|\ M_1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

El segundo término

$$\left| \int_a^A f'(x) \int_a^x g(t)\ dt\ dx \right| \le \int_a^A |f'(x)|\ \left| \int_a^x g(t)\ dt \right|\ dx$$

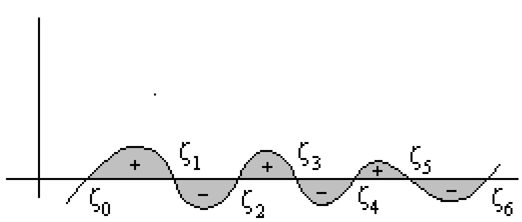
$$\le M_1 \int_a^A |f'(x)|\ dx$$

$$\le M_1 \int_a^A f'(x)\ dx$$

$$\le M_1\ [\,f(A) - f(a)\,]$$

<u>4.7.- CRITERIO DE COMPARACION POR SERIES ALTERNADAS</u>

Cuando se tiene una función con infinitos ceros $\{\zeta_k\}$ se puede igualar una Integral impropia con una Serie Alternada



$$\int_{\zeta_0}^{+\infty} f \quad = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \quad + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad + \int_{\zeta_2}^{\zeta_3} \quad + \dots$$

$$+ \qquad - \qquad +$$

donde cada término de la SA es una integral

Recordando el Teorema de Leibnitz de Series Alternadas

Teorema de Leibnitz. Convergencia de Series Alternadas

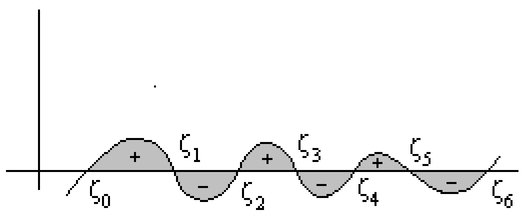
$$u_n \geq u_{n+1} \geq 0$$

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n \; u_n \; \in CV$$

se tiene el siguiente Criterio de CV

T_5.- Criterio de Convergencia de Funciones oscilantes

H.- Sea una función alternada con infinitos ceros



$$u_n = \int_{\zeta_n}^{\zeta_{n+1}}$$

H_1 $\quad |\, u_n \,| \geq |\, u_{n+1} \,|$

H_2 $\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n \,|\, u_n \,| \in CV \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\zeta_0}^{+\infty} f \in CV$

5.- TABLA DE INTEGRALES IMPROPIAS

1.- $\int_{V+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \in CV \iff \alpha > 1$

2.- $\int_{V0+} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \in CV \iff \alpha < 1$

3.- $\int_{V0} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx \in CV \iff \alpha = \frac{p}{q} \in Q \wedge (p,q) \in \text{Primos entre si} \wedge p < q \wedge q \in \text{Impar}$

$$\iff \alpha = \frac{p}{q} \in Q \wedge (p,q) \in \text{Primos entre si} \wedge p \geq q \wedge q \in \text{Impar} \wedge p \in \text{Impar}$$

4.- $\int_{V+\infty} \frac{Lx}{x^{\alpha}}\, dx \in CV \iff \alpha > 1$

5.- $\int_{V0+} \frac{Lx}{x^{\alpha}}\, dx \in CV \iff \alpha < 1$

6.- $\int_{V+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha}}\, dx \in CV \iff \alpha > 0$

7.- $\int_{V+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha}\, dx \in CV \iff \forall \alpha \in R$